TABLE DES MATIÈRES

Introduction **2**

1 Rappels des notions de base **3**
1.1 Système dynamique 3
1.2 Système quadratique dans $\mathbb{R}^2$ 3
1.3 Système différentiel autonome 3
1.4 Flot du système différentiel 4
1.5 Point d'équilibre 4
1.6 Point d'équilibre hyperbolique 4
1.7 Point d'équilibre dégénéré 4
1.8 Integrale Premier 5
1.9 Cycle limite 5
1.10 Cycle limite hyperbolique 5
1.11 Solution périodique 6
1.12 Plan et portrait de phase 6
1.13 Courbe invariante 6
1.14 Facteur intégrant 7
1.15 Système Hamiltonien 7
1.16 Équation de Liénard 8
1.17 Équation de Van Der Pol 8
1.18 Degré de Brouwer 8
1.19 Classification des points d'équilibre dans $\mathbb{R}^2$ 9

2 Méthode de la moyennisation **14**
2.1 Méthode de la moyennisation du premier ordre pour les systèmes différentiels discontinus 14
2.2 Méthode de la moyennisation du premier ordre pour les systèmes différentiels autonomes planaires 15

2.3 Méthode de la moyennisation d'ordre k (pour $k = 1, 2, 3$), dans le cas continu 16
2.4 Méthode de la moyennisation du deuxième ordre pour les systèmes différentiels autonomes planaire 18

3 Cycles limites pour les systèmes différentiels quadratiques discontinus à deux zones 19
3.1 Introduction 19
3.2 Preuve des théorèmes 3.1.1 et 3.1.2 22
3.2.1 Preuve de théorème 3.1.1 22
3.2.2 Preuve de théorème 3.1.2 24

4 Bifurcation de second ordre des cycles Limites d'un centre réversible quadratique 28
4.1 Introduction 28
4.2 Bifurcation du cycle limite de premier ordre 29
4.3 Bifurcation de cycle limite de deuxième ordre 33

Conclusion 43

Bibliographie 44

Table des figures

Fig 1.1-Classification des cycles limites 05
Fig 1.2-Nœud impropre 09
Fig 1.3-Foyer 09
Fig 1.4-Centre 10
Fig 1.5-Nœud impropre 10
Fig 1.6-Foyer 11
Fig 1.7-Selle 11
Fig 1.8-Nœud dégénéré 12
Fig 1.9-Nœud dégénéré 12
Fig 1.10-Nœud propre 13
Fig 1.11-Nœud propre 13

Introduction

Les systèmes dynamiques peuvent présenter des oscillations auto-entretenues, appelées cycles limites, qui peuvent apparaître dans presque tous les domaines de la science et de l'ingénierie. Développer la théorie du cycle limite est non seulement théoriquement significative, mais aussi important dans la pratique. La théorie des cycles limites est étroitement liée au $16^{ème}$ problème de Hilbert, l'un des 23 problèmes mathématiques proposés par D. Hilbert en 1900 [28]. Une version moderne de ce problème a été incluse dans les 18 problèmes mathématiques les plus difficiles proposés par S. Smale pour 21^{e} siècle [41].
On considère le système différentiel plan suivant

$$\frac{dx}{dt} = P_n(x,y), \frac{dy}{dt} = Q_n(x,y), \tag{1}$$

ou $P_n(x,y)$ et $Q_n(x,y)$ sont des polynômes de degré n. La deuxième partie du $16^{ème}$ problème de Hilbert est de trouver une borne supérieure sur le nombre de cycles limites que le système (1) peut avoir. Cette borne supérieure, notée $H(n)$, est appelée nombre de Hilbert. Pour les systèmes polynomiaux quadratiques généraux, quatre cycles limites ont été trouvés en 1979 [40], [12], qui ont également été obtenus récemment dans les systèmes quadratiques quasi intégrables [45]. Cependant, si $H(2) = 4$ ou non reste une question ouverte. Pour les systèmes polynomiaux de degré 3, de nombreux résultats ont été obtenus sur la borne inférieure du nombre de Hilbert, et le meilleur résultat jusqu'à présent est $H(3) \geqslant 13$ [29], [30]. Dans les applications réelles, la bifurcation des cycles limites due à la bifurcation de Hopf est un phénomène courant, mais les systèmes réels ont souvent des dimensions supérieures à deux [26], [46], [47]. Dans un tel cas, le système peut d'abord être réduit à un système dynamique à 2-dimension en utilisant la théorie de variété centrale (par exemple, voir [26], [25]) puis d'étudier les bifurcation des cycles limites du système réduit.
Notre mémoire comporte quatre chapitres :
Le premier chapitre Comporte un rappel des notions de base sur les systèmes dynamiques et les équations différentielles ordinaires. On commence par définir les sys-

tèmes dynamiques, le système quadratique dans $\mathbb{R}^2$, le système différentiel autonome, la notion de flot du système différentiel, le point d'équilibre, le point d'équilibre hyperbolique, le point d'équilibre dégénéré, l'integrale premier, nous avons défini aussi les notions suivantes : cycle limite, cycle limite hyperbolique, solution périodique, plan et portrait de phase, courbe invariante,facteur intégrant, système Hamiltonien, équation de Liénard, équation de Van Der Pol, degré de Brouwer, classification des points d'équilibre dans $\mathbb{R}^2$.

Dans le deuxième chapitre Nous avons introduit les théorèmes importants de la méthode de moyennisation pour les systèmes différentiels discontinus et continus.

Dans le troisième chapitre on étudie l'existence des cycles limites qui bifurquent des orbites périodiques des centres isochrones quadratiques

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x^2, \\ \dot{y} = x + xy, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x^2 - y^2, \\ \dot{y} = x + 2xy. \end{cases}$$

Quand ils sont perturbés par une classe des systèmes différentiels polynomiaux quadratiques discontinus avec la ligne droite de discontinuité $y = 0$.

Dans le quatrième chapitre on étudie le nombre maximum des cycles limites du système différentiel perturbé suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + xy + \sum_{k=1}^{2} \varepsilon^k \sum_{i+j=2} a_{i,j}^{(k)} x^i y^j, \\ \dot{y} = x + y^2 + \sum_{k=1}^{2} \varepsilon^k \sum_{i+j=2} b_{i,j}^{(k)} x^i y^j, \end{cases}$$

où ε est un paramètre suffisamment petit.

CHAPITRE 1

Rappels des notions de base

L'objectif essentiel de ce chapitre est d'étudier quelques notions et rappels pour l'étude qualitative des systèmes dynamiques et des équations différentielles ordinaires.

1.1 Système dynamique

Définition 1.1.1 *Un système dynamique sur* $\mathbb{R}^n$ *est une application* $\Delta : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *tel que*

(1) $\Delta(., x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *est une application continue,*
(2) $\Delta(t, .) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *est une application continue,*
(3) $\Delta(0, x) = x$,
(4) $\Delta(t + s, x) = \Delta(t, \Delta(s, x)) \ \ \forall t, s \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n$.

1.2 Système quadratique dans $\mathbb{R}^2$

Définition 1.2.1 *Un système quadratique dans* $\mathbb{R}^2$ *est de la forme*

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{0,0} + a_{1,0}x + a_{2,0}x^2 + a_{0,1}y + a_{1,1}xy + a_{0,2}y^2, \\ \dot{y} = b_{0,0} + b_{1,0}x + b_{2,0}x^2 + b_{0,1}y + b_{1,1}xy + b_{0,2}y^2. \end{cases} \tag{1.1}$$

1.3 Système différentiel autonome

Définition 1.3.1 *Un système différentiel autonome est un système d'équations différentielles ordinaires qui ne contient pas explicitement la variable indépendante* t.

La forme générale d'un système autonome de premier ordre est

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.2}$$

1.4 Flot du système différentiel

Définition 1.4.1 *Soit le système différentiel*

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.3}$$

avec la condition initiale $x(0) = x_0$, $x_0 \in E$ un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f \in C^1(E)$, Soit $\phi(t, x_0)$ la solution de (1.3), l'ensemble des applications $\phi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ définies par

$$\phi_t(x_0) = \phi(t, x_0),$$

est appelé le flot du système différentiel (1.3).

1.5 Point d'équilibre

Définition 1.5.1 *On appelle point d'équilibre ou point critique ou point singulier du système différentiel*

$$\dot{x} = f(x), \ x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.4}$$

le point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$f(x_0) = 0.$$

1.6 Point d'équilibre hyperbolique

Définition 1.6.1 *Un point d'équilibre x_0 de système différentiel (1.4) est dit hyperbolique si les valeurs propres de la matrice $A = Df(x_0)$ ont toutes une partie réelle non nulle. Dans le cas contraire, le point d'équilibre est dit non-hyperbolique.*

1.7 Point d'équilibre dégénéré

Définition 1.7.1 *Un point d'équilibre x_0 de système différentiel (1.4) est dit dégénéré si au moins une des n valeurs propres de la matrice Jacobienne $A = Df(x_0)$ est nulle.*

1.8 Integrale Premier

Définition 1.8.1 *On appelle intégrale première du système*

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y), \\ \dot{y} = f_2(x, y), \end{cases} \tag{1.5}$$

une fonction $H(x, y, t)$ qui est constante sur les trajectoires. La fonction H vérifie la propriété suivante

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial H}{\partial y}\dot{y} = 0.$$

1.9 Cycle limite

Définition 1.9.1 *Pour un système plan, on appelle cycle limite est une orbite fermée isolé. C'est à dire, au voisinage de cette orbite on ne peut pas avoir une autre orbite fermé. La stabilité du cycle limite est liée au comportement des trajectoires de son voisinage.*

1.10 Cycle limite hyperbolique

Définition 1.10.1 *Soit le système (1.5) a une orbite périodique $(x(t), y(t))$ de période T. Soit*

$$\delta = \int_0^T \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{\partial f_2}{\partial y}\right)(x(t), y(t))dt.$$

Si $\delta > 0$ (resp. < 0) alors l'orbite périodique $(x(t), y(t))$ est un cycle limite instable (resp.stable). Il peut être un cycle limite stable, instable ou semi-stable ou peut appartenir à une bande $\delta = 0$.
Une orbite périodique $(x(t), y(t))$ ayant $\delta \neq 0$ est un cycle limite hyperbolique.

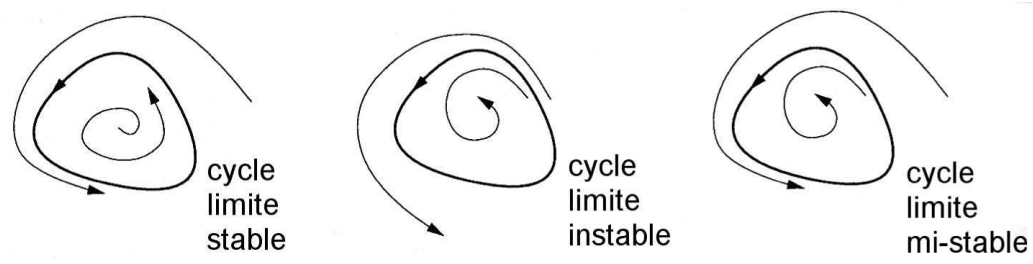


Fig 1.1-Classification des cycles limites

1.11 Solution périodique

Définition 1.11.1 *Soit $x = \varphi(t)$ une solution du système (1.2) et supposons qu'il existe un nombre $T > 0$, tel que*

$$\varphi(t+T) = \varphi(t) \text{ pour } T > 0.$$

Alors $\varphi(t)$ s'appelle une solution périodique de système (1.2). $T > 0$ appelé le periode lorsqu'il est le plus petite reél positive vérifie la formule précédente.

1.12 Plan et portrait de phase

Définition 1.12.1 *Soit le système différentiel planaire*

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x,y), \\ \dot{y} = Q(x,y). \end{cases} \tag{1.6}$$

Un portrait de phase est l'ensembles des trajectoires dans l'espace de phase. En particulier, pour les systèmes autonomes d'équations différentielles ordinaires de deux variables. Les solutions $(x(t), y(t))$ du système (1.6) représentent dans le plan (xoy) des courbes appelées orbites. Les points critiques de ce système sont des solutions constantes et la figure complète des orbites de ce système ainsi que ces points critiques représentent le portrait de phase et le plan (xoy) est le plan de phase.

1.13 Courbe invariante

Définition 1.13.1 *On appelle courbe invariante du système (1.6), toute courbe d'équation $U(x,y) = 0$ du plan de phase pour laquelle il existe une fonction $K = K(x,y)$ appelée cofacteur associé à la courbe invariante, telle que*

$$P\frac{\partial U}{\partial x} + Q\frac{\partial U}{\partial y} = KU. \tag{1.7}$$

Cette égalité montre que sur la courbe invariante le gradient $\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}\right)$ de U est orthogonal au champs de vecteurs $X = (P,Q)$, donc en tout point de la courbe invariante le champs de vecteurs est tangent à cette courbe, donc elle est formée de solutions (ou trajectoires) du champs de vecteurs X,ce qui justifie son appellation. Dans le cas où le système (1.6) est polynomial et possède une courbe invariante $U(x,y) = 0$ algébrique de degré m, le cofacteur est aussi algébrique et son degré vérifie $d^\circ K \leq m-1$. Si $U_1 = 0$ et $U_2 = 0$ sont deux courbes invariantes pour le système (1.6), de cofacteurs respectifs K_1et K_2, alors la courbe $U_1U_2 = 0$ est aussi invariante et son cofacteur est $K = K_1 + K_2$.

1.14 Facteur intégrant

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Définition 1.14.1 *On appelle facteur intégrant du systeme* (1.6) *sur* Ω, *associé à une intégrale première* H, *une* C^1*-fonction* $R : \Omega \to \mathbb{R}$ *non identiquement nulle telle que*

$$\frac{\partial(RP)}{\partial x} = -\frac{\partial(RQ)}{\partial y} \Leftrightarrow \operatorname{div}(RX) = 0, X = (P, Q).$$

Losque le système (1.6) *possède un facteur intégrant* R, *il est intégrable et l'intégrale première* H *s'exprime en fonction du facteur intégrant par*

$$H = \int R(x, y)P(x, y)dy + h(x),$$

la fonction h *est choisie de telle sorte que* $\dfrac{\partial H}{\partial x} = -RQ$.

1.15 Système Hamiltonien

Définition 1.15.1 *Soit* E *un ouvert de* $\mathbb{R}^{2n}$ *et* $H \in C^2(E)$ *tel que* $H = H(x, y)$ *avec* $x, y \in \mathbb{R}^n$.
Un système différentiel de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial y}, \\ \dot{y} = -\dfrac{\partial H}{\partial x}, \end{cases} \tag{1.8}$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x} &= \left(\frac{\partial H}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial H}{\partial x_n}\right)^T, \\ \frac{\partial H}{\partial y} &= \left(\frac{\partial H}{\partial y_1}, ..., \frac{\partial H}{\partial y_n}\right)^T, \end{aligned}$$

est dit système Hamiltonien. La fonction H *est appelée hamiltonien du système. Si* (x, y) *est une solution du système hamiltonien* (1.8), *alors on calcule*

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial H}{\partial y}\dot{y} = 0.$$

1.16 Équation de Liénard

Définition 1.16.1 *On appelle « équation de Liénard » l'équation différentielle*

$$\ddot{x} + f(x)\,\dot{x} + g(x) = 0, \tag{1.9}$$

on peut l'écrire sous deux formes d'un système différentiel, soit

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -f(x)\,\dot{x} - g(x), \end{cases} \tag{1.10}$$

soit

$$\begin{cases} \dot{x} = y - F(x), \\ \dot{y} = -g(x), \end{cases} \tag{1.11}$$

avec

$$F(x) = \int_0^x f(s)\,ds,$$

f et g sont de classe C^1.
Le système (1.10) ou (1.11) est appelé « système de Liénard ».

1.17 Équation de Van Der Pol

Définition 1.17.1 *On appelle « équation de Van Der Pol » l'équation différentielle suivante*

$$\ddot{x} - \mu\left(1 - x^2\right)\dot{x} + x = 0, \quad \mu \in \mathbb{R},$$

c'est un cas particulier de l'équation de Liénard.

1.18 Degré de Brouwer

Définition 1.18.1 *Soit D un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $g \in C^1(D)$ et V est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ tel que $\bar{V} \subset D$ et $Z_g = \{z \in V : g(z) = 0\}$.*
Supposons aussi $J_g(z) \neq 0$ ($J_g(z)$ désigne le déterminant de la jacobienne de g en z), $\forall z \in Z_g$, alors le degré de Brouwer de la fonction g par rapport à V et à 0, noté $d_B(g, V, 0)$ est défini par

$$d_B(g, V, 0) = \sum_{z \in Z_g} \operatorname{sign}\left(J_g(z)\right).$$

Remarque 1.1 *Soit $g : D \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^1, avec $g(a) = 0$, ou D est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $a \in D$, si $J_g(a) \neq 0$, il existe un voisinage V de a tel que $g(z) \neq 0$ pour tout $z \in V \backslash \{a\}$ et alors*

$$d_B(g, V, 0) \in \{-1, 1\}.$$

1.19 Classification des points d'équilibre dans $\mathbb{R}^2$

Considérons le système différentiel linéaire

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases}, \text{ où } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

On supposera $\det A \neq 0$; L'origine est un seul point d'équilibre de ce système
I) Quand la matrice A est diagonalisable (valeurs propres distinctes)
1) Equilibres stables : les 2 valeurs propres de A ont chacune une partie réelle négative

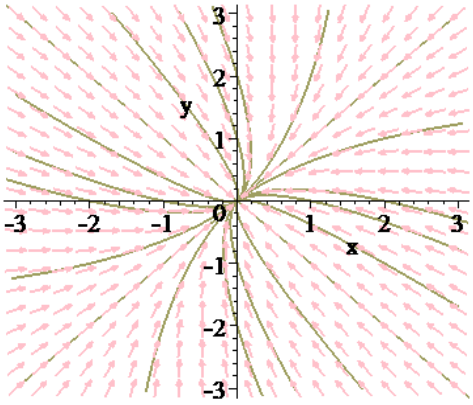


Fig. 1.2. Nœud impropre

Type/nom du point d'équilibre : Nœud impropre
Nature de l'équilibre : Stable
Caractérisation par les valeurs propres de la matrice A : Les deux valeurs propres de A sont réelles, distinctes et strictement négatives

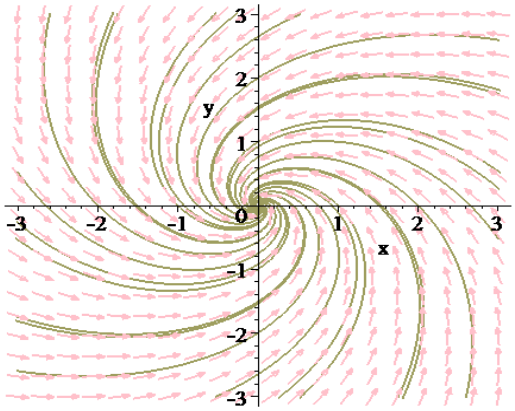


Fig. 1.3. Foyer

Type/nom du point d'équilibre : Foyer
Nature de l'équilibre : Stable
Caractérisation par les valeurs propres de la matrice A : Les deux valeurs propres de A sont complexes (et conjuguées) et leur partie réelle (commune) est strictement négative

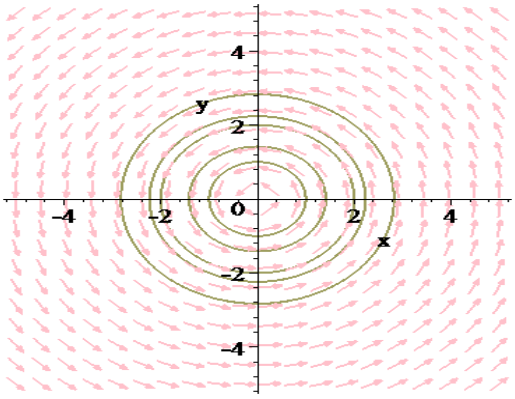


Fig. 1.4. Centre

Type/nom du point d'équilibre : Centre
Nature de l'équilibre : Stable
Caractérisation par les valeurs propres de la matrice A : Les deux valeurs propres de A sont imaginaires pures (leur partie réelle est nulle)
2) Equilibres instables : au moins une des 2 valeurs propres de A possède une partie réelle strictement positive

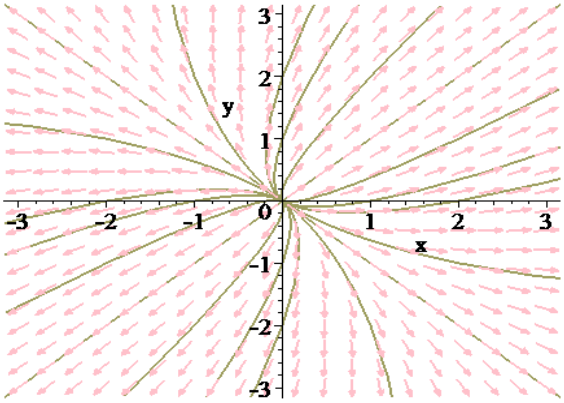


Fig. 1.5. Nœud impropre

Type/nom du point d'équilibre : Nœud impropre
Nature de l'équilibre : Instable

Caractérisation par les valeurs propres de la matrice A : Les deux valeurs propres de A sont réelles, distinctes et strictement positives

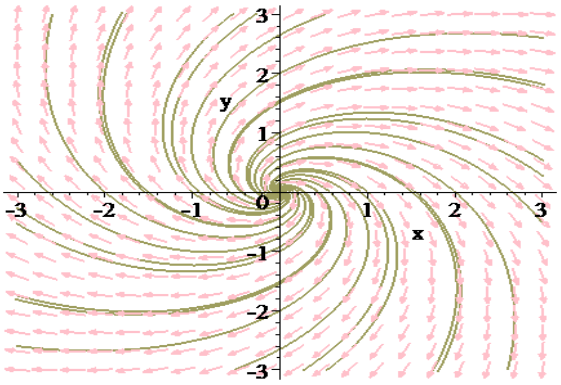


Fig. 1.6. Foyer

Type/nom du point d'équilibre : Foyer
Nature de l'équilibre : Instable
Caractérisation par les valeurs propres de la matrice A : Les deux valeurs propres de A sont complexes (et conjuguées) et leur partie réelle (commune) est strictement positive

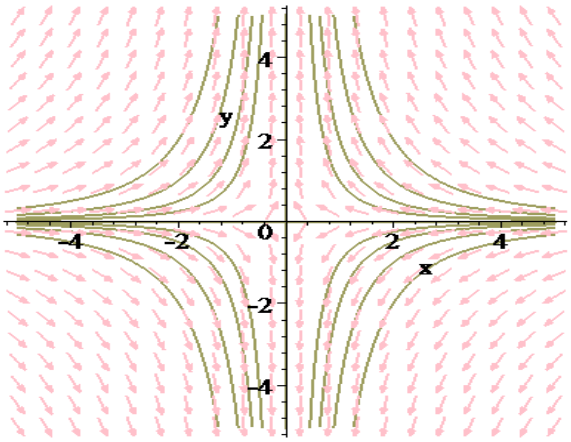


Fig. 1.7. Selle

Type/nom du point d'équilibre : Point selle
Nature de l'équilibre : Instable
Caractérisation par les valeurs propres de la matrice A : Les deux valeurs propres de A sont réelles et de signes opposés

II) Quand la matrice A n'est pas diagonalisable (valeur propre double)
1) Equilibre stable :

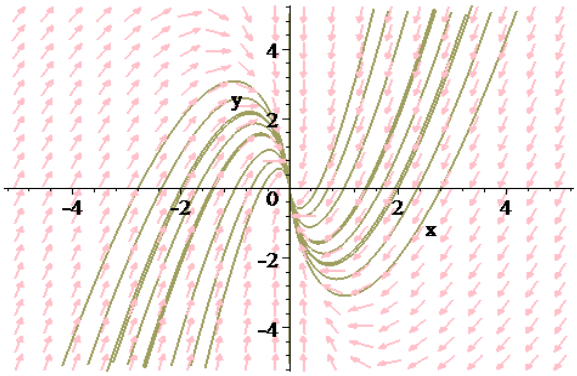


Fig.1.8.Noeud dgnr

Type/nom du point d'équilibre : Noeud dégénéré
Nature de l'équilibre : Stable
Caractérisation par les valeurs propres de la matrice A **:** Les deux valeurs propres de A sont identiques (donc réelles) et strictement négatives
2) Equilibre instable :

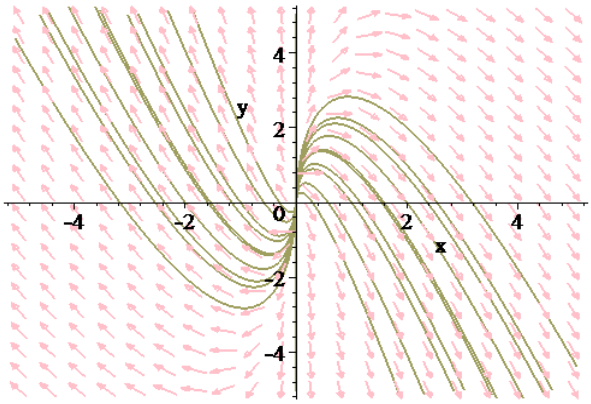


Fig.1.9.Noeud dgnr

Type/nom du point d'équilibre : Noeud dégénéré
Nature de l'équilibre : Instable
Caractérisation par les valeurs propres de la matrice A **:** Les deux valeurs propres de A sont identiques (donc réelles) et strictement positives
III) Quand la matrice A **est diagonalisable (valeurs propres double)**

1) Equilibre stable :

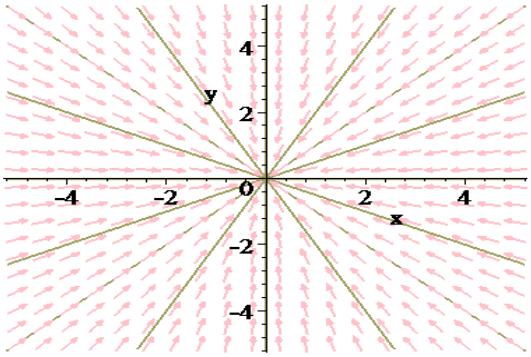


Fig. 1.10. Noeud propre

Type/nom du point d'équilibre : Noeud propre
Nature de l'équilibre : Stable
Caractérisation par les valeurs propres de la matrice A **:** Les deux valeurs propres de A sont identiques (donc réelles) et strictement négatives
2) Equilibre instable :

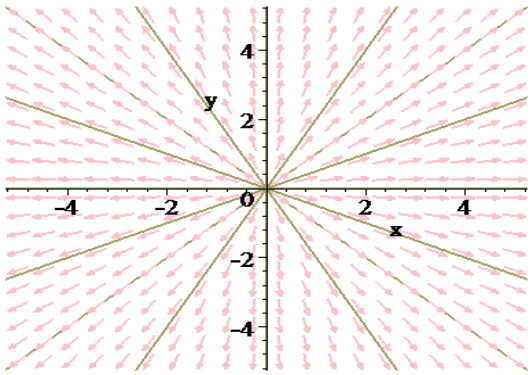


Fig. 1.11. Noeud propre

Type/nom du point d'équilibre : Noeud propre
Nature de l'équilibre : Instable
Caractérisation par les valeurs propres de la matrice A **:** Les deux valeurs propres de A sont identiques (donc réelles) et strictement positives

CHAPITRE 2

Méthode de la moyennisation

2.1 Méthode de la moyennisation du premier ordre pour les systèmes différentiels discontinus

Théorème 2.1.1 *On considère le système différentiel discontinu suivant*

$$x'(t) = \varepsilon F(t,x) + \varepsilon^2 R(t,x,\varepsilon), \tag{2.1}$$

avec

$$\begin{aligned} F(t,x) &= F_1(t,x) + \text{sign}(h(t,x))F_2(t,x), \\ R(t,x,\varepsilon) &= R_1(t,x,\varepsilon) + \text{sign}(h(t,x))R_2(t,x,\varepsilon), \end{aligned}$$

où $F_1, F_2 : \mathbb{R}\times D \to \mathbb{R}^n, R_1, R_2 : \mathbb{R}\times D\times(-\varepsilon_0,\varepsilon_0) \to \mathbb{R}^n$ *et* $h : \mathbb{R}\times D \to \mathbb{R}$ *sont des fonctions* T*-périodiques en la première variable* t *et* D *est un ouvert de* $\mathbb{R}^n$*. On suppose que* h *est une fonction de classe* C^1 *ayant* 0 *comme valeur régulière. Notons par* $\mathcal{M} = h^{-1}(0)$*, par,* $\Sigma = \{0\}\times D \nsubseteq \mathcal{M}$*, par* $\Sigma_0 = \Sigma\backslash\mathcal{M} \neq \varnothing$*, et son élément par* $z \equiv (0,z) \notin \mathcal{M}$*.*
On définit la fonction moyenne $f : D \to \mathbb{R}^n$ *comme suit*

$$f(x) = \int_0^T F(t,x)dt, \tag{2.2}$$

on suppose les trois conditions suivantes
(i) F_1, F_2, R_1, R_2 *et* h *sont locallement Lipschitzienne par rapport* x*.*
(ii) *Pour* $a \in \Sigma_0$ *avec* $f(a) = 0$*, il existe un voisinage* V *de* a *tel que* $f(z) \neq 0$ *pour tout* $z \in \bar{V}\backslash\{a\}$ *et* $d_B(f,V,a) \neq 0$ *(c.-à-d. le degré de Brouwer de* f *en* a *est non nul).*

(iii) *Si* $\partial h/\partial t(t_0, z_0) = 0$ *pour tout* $(t_0, z_0) \in \mathcal{M}$, *alors* $(\langle \nabla_x h, F_1\rangle^2 - \langle \nabla_x h, F_2\rangle^2)$ $(t_0, z_0) > 0$.
Alors, pour $|\varepsilon| > 0$ *suffisament petit, il existe une solution* $T-$*périodique* $x(., \varepsilon)$ *pour le système* (2.1) *tel que* $x(t, \varepsilon) \to a$ *quand* $\varepsilon \to 0$.

Le Théorème précédent est développé dans [34].

Remarque 2.1 *On note que si la fonction* $f(z)$ *est de classe* C^1 *et que le jacobien de* f *en* a *est non nul, alors* $d_B(f, V, a) \neq 0$. *Pour plus de détails sur le degré de Brouwer voir [6] et [38].*

2.2 Méthode de la moyennisation du premier ordre pour les systèmes différentiels autonomes planaires

On considère le système différentiel autonôme planaire

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases} \tag{2.3}$$

où $P, Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues. Supposons que (2.3) a un anneau périodique autour du point singulier $(0, 0)$

$$\{\Gamma_h\} \subset \{(x, y) : H(x, y) = h, \quad h_1 < h < h_2\},$$

où H est une intégrale première du système (2.3).
On perturbe le système (2.3) comme suit

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) + \varepsilon p(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y) + \varepsilon q(x, y), \end{cases} \tag{2.4}$$

où $p, q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues.
Afin d'appliquer la méthode de moyennisation pour étudier les cycles limites de système (2.4), nous devons écrire le système (2.4) sous la forme standard (2.1). Le résultat suivant de [7] fournit une manière pour transformer (2.4) sous cette forme standard.

Théorème 2.2.1 *(Voir [7].) On considère le système* (2.3) *et son l'intégrale première* H. *Supposons que* $xQ(x, y) - yP(x, y) \neq 0$ *pour tous* (x, y) *dans l'anneau périodique. Soit* $\rho : (\sqrt{h_1}, \sqrt{h_2}) \times [0, 2\pi) \to [0, \infty)$ *une fonction continue telle que*

$$H(\rho(R, \varphi)\cos\varphi, \rho(R, \varphi)\sin\varphi) = R^2, \tag{2.5}$$

pour tout $R \in (\sqrt{h_1}, \sqrt{h_2})$ *et tout* $\varphi \in [0, 2\pi)$. *Alors, l'équation différentielle qui décrit la dépendance entre la racine carrée de l'énergie,* $R = \sqrt{h}$ *et l'angle* φ *pour le système* (2.4) *est*

$$\frac{dR}{d\varphi} = \varepsilon \frac{\mu\left(x^2 + y^2\right)(Qp - Pq)}{2R\left(Qx - Py\right)} + O\left(\varepsilon^2\right), \tag{2.6}$$

où $\mu = \mu(x, y)$ *est le facteur intégrant du système* (2.3) *correspondant à l'intégrale première* H, *et* $x = \rho(R, \varphi)\cos\varphi$ *et* $y = \rho(R, \varphi)\sin\varphi$.

Afin d'étudier le nombre de zéros de la fonction moyenne (2.2), nous utiliserons le résultat ci-dessous prouvé en [37].

Soit A un ensemble et soit $f_1, f_2, ..., f_n : A \to \mathbb{R}$. On dit que $f_1, ..., f_n$ sont des fonctions linéairement indépendantes si et seulement si

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(a) = 0 \quad \text{pour tous } a \in A \implies \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0.$$

Proposition 2.2.1 *(Voir [37]) Si* $f_1, f_2, ..., f_n : A \to \mathbb{R}$ *sont linéairement indépendants alors il existe* $a_1, ..., a_{n-1} \in A$ *et* $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ *tel que pour chaque* $i \in \{1, ..., n-1\}$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_k f_k(a_i) = 0.$$

2.3 Méthode de la moyennisation d'ordre k (pour $k = 1, 2, 3$), dans le cas continu

Lemme 2.3.1 [4]. *On considère le système différentiel suivant*

$$\dot{x}(t) = \varepsilon F_1(t, x) + \varepsilon^2 F_2(t, x) + \varepsilon^3 F_3(t, x) + \varepsilon^4 W(t, x, \varepsilon), \tag{2.7}$$

où $F_1, F_2, F_3 : \mathbb{R} \times D \to \mathbb{R}, W : \mathbb{R} \times D \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \to \mathbb{R}(\varepsilon_0 > 0)$ *sont des fonctions continues et* $T-$*périodiques par rapport à la variable* t *et* D *est un ouvert de* $\mathbb{R}$. *Supposons que :*
(**i**) $F_1(t, .) \in C^2(D), F_2(t, .) \in C^1(D)$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$,$F_1, F_2, F_3, W, D_x^2 F_1, D_x F_2$ *sont localement lipschitziennes par rapport à la variable* x, W *est deux fois différentiable.*

On définit $F_k^0 : D \to \mathbb{R}$ *pour* $K = 1, 2, 3$ *comme suit :*

$$\begin{aligned}
F_1^0(x) &= \frac{1}{T}\int_0^T F_1(s,x)ds, \\
F_2^0(x) &= \frac{1}{T}\int_0^T \left[\frac{\partial F_1(s,x)}{\partial x}y_1(s,x) + F_1(s,x)\right] ds, \\
F_3^0(x) &= \frac{1}{T}\int_0^T \left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F_1(s,x)}{\partial x^2}y_1^2(s,x) + \frac{1}{2}\frac{\partial F_1(s,x)}{\partial x}y_2(s,x) + \frac{\partial F_2(s,x)}{\partial x}y_1(s,x) + F_3(s,x)\right] ds,
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
y_1(s,x) &= \int_0^s F_1(t,x)dt, \\
y_2(s,x) &= 2\int_0^s \left[\frac{\partial F_1(t,x)}{\partial x}y_1(t,x) + F_2(t,x)\right] dt,
\end{aligned}$$

(**ii**) *pour un ensemble ouvert et borné* $V \subset D$ *et pour chaque* $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)\backslash\{0\}$, *il existe* $a \in V$ *tel que*

$$\frac{d}{dx}(F_1^0 + \varepsilon F_2^0 + \varepsilon^2 F_3^0)(a) \neq 0.$$

Alors, pour $|\varepsilon| > 0$ *suffisament petit, il existe une solution* $x(t,\varepsilon)$ *T-périodique pour le système* (2.7) *tel que* $x(0,\varepsilon) \to a$ *lorsque* $\varepsilon \to 0$.

Corollaire 2.3.1 [4]. *Si les hypothèses du lemme* 2.3.1, *sont satisfaites et si* $F_1^0(x)$ *n'est pas identique à zéro, alors les zéros de* $(F_1^0+\varepsilon F_2^0+\varepsilon^2 F_3^0)(x)$ *sont principalement les zéros de* $F_1^0(x)$ *pour* $|\varepsilon|$ *suffisamment petit. Dans ce cas, les conclusions du lemme* 2.3.1 *sont vraies. si* $F_1^0(x)$ *est identique à zéro et* $F_2^0(x)$ *n'est pas identique à zéro, alors les zéros de* $(F_1^0 + \varepsilon F_2^0 + \varepsilon^2 F_3^0)(x)$ *sont principalement les zéros de* $F_2^0(x)$ *pour* $|\varepsilon|$ *suffisamment petit . Dans ce cas, les conclusions du lemme* 2.3.1 *sont également vraies.*

On appelle les fonctions $F_k^0(x)(k = 1, 2)$, définies dans le lemme 2.3.1, les fonctions moyennes du premier et du second ordre associées au système (2.7), respectivement.

2.4 Méthode de la moyennisation du deuxième ordre pour les systèmes différentiels autonomes planaire

On considère le système planaire intégrable de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x,y), \\ \dot{y} = Q(x,y), \end{cases} \tag{2.8}$$

où $P(x,y), Q(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues telles que (2.8) a une intégrale première H avec le facteur intégrant $\mu(x,y) \neq 0$, et a a un anneau périodique autour du point singulier $(0,0)$

$$\gamma_h = \{(x,y) : H(x,y) = h,\ h_c < h < h_s\},$$

où H est une intégrale première du système (2.8).
On perturbe le système (2.8) comme suit

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x,y) + \varepsilon p(x,y,\varepsilon), \\ \dot{y} = Q(x,y) + \varepsilon q(x,y,\varepsilon), \end{cases} \tag{2.9}$$

où ε un paramètre suffisamment petit et $p(x,y,\varepsilon), q(x,y,\varepsilon) : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues.
Afin d'appliquer la méthode de moyennisation pour étudier les cycles limites de système (2.9), nous devons écrire le système (2.9) sous la forme standard (2.7).
Le résultat suivant fournit une manière pour transformer (2.9) sous cette forme standard.

Lemme 2.4.1 *[7].On considère le système* (2.8)*, son l'intégrale première H. Supposons que $xQ(x,y) - yP(x,y) \neq 0$ pour tous (x,y) dans l'anneau périodique. Soit $p : (\sqrt[2]{h_\varepsilon},\ \sqrt[2]{h_s}) \times [0,2\pi) \to [0,+\infty)$ une fonction continue telle que*

$$H(\rho(R,\varphi)\cos\varphi, \rho(R,\varphi)\sin\varphi) = R^2,$$

pour tout $h \in (\sqrt{h_c},\ \sqrt{h_s})$ et tout $\varphi \in [0,2\pi)$. Alors, l'équation différentielle qui décrit la dépendance entre la racine carrée de l'énergie, $R = \sqrt{h}$ et l'angle φ pour le système (2.9) *est*

$$\frac{dR}{d\varphi} = \varepsilon \frac{\mu(x^2+y^2)(Qp-Pq)}{2R(Qx-Py) + 2R_\varepsilon(qx-py)}\Bigg|_{x=\rho(R,\varphi)\cos\varphi, y=\rho(R,\varphi)\sin\varphi}, \tag{2.10}$$

ce qui équivaut à

$$\frac{dR}{d\varphi} = \left[\varepsilon \frac{\mu(x^2+y^2)(Qp-Pq)}{2R(Qx-Py)} - \varepsilon^2 \frac{\mu(x^2+y^2)(Qp-Pq)(qx-py)}{2R(Qx-Py)^2}\right]\Bigg|_{x=\rho(R,\varphi)\cos\varphi, y=\rho(R,\varphi)\sin\varphi} + O(\varepsilon^3),$$

où $\mu = \mu(x,y)$ est le facteur intégrant du système (2.8) *correspondant à l'intégrale première H, et $x = \rho(R,\varphi)\cos\varphi$ et $y = \rho(R,\varphi)\sin\varphi$.*

CHAPITRE 3

Cycles limites pour les systèmes différentiels quadratiques discontinus à deux zones

3.1 Introduction

L'un des principaux problèmes de la théorie qualitative des systèmes différentiels planaires polynomiaux continus est l'étude de leurs cycles limites, voir par exemple [27]. Les cycles limites des systèmes différentiels planaires polynomiaux quadratiques continus ont été étudiés intensivement, voir par exemple les livres [15], [44] et les centaines de références qui y sont citées. La classification des systèmes différentiels polynomiaux quadratiques à centre isochrone est due à Loud [39]. Il a prouvé qu'après un changement affine de variables et une mise à l'échelle de la variable indépendante, tout centre isochrone quadratique peut être écrit comme l'un des quatre systèmes du *Tableau 1.* Chicone et Jacobs ont prouvé dans [14] qu'au plus deux cycles limites bifurquent des orbites périodiques du centre isochrone

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x^2, \\ \dot{y} = x + xy, \end{cases} \tag{3.1}$$

et qu'au plus un cycle limite bifurque du centre isochrone

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x^2 - y^2, \\ \dot{y} = x + 2xy, \end{cases} \tag{3.2}$$

lorsque ces centres quadratiques sont perturbés d'une classe des systèmes différentiels polynomiaux quadratiques. Leur étude est basée sur la fonction de déplacement en utilisant certains résultats de Bautin [3]. En [7], les auteurs ont réprouvé plus facilement, en utilisant la méthode de moyennisation, l'existence d'au moins deux cycles limites bifurquant des orbites périodiques du centre (3.1) lorsque cela est perturbé d'une classe de tous les systèmes différentiels polynomiaux quadratiques.

Stimulé par des phénomènes discontinus dans le monde réel (voir par exemple le livre [5] et les références qui y sont citées), un grand intérêt s'est manifesté pour l'étude des cycles limites des systèmes différentiels discontinus, principalement pour les systèmes différentiels linéaires discontinus, voir aussi le document [36] et les références citées ici.

Notre objectif est d'étudier le nombre de cycles limites des systèmes différentiels quadratiques discontinus à deux zones séparées par une droite. Pour autant que nous le savons pour les systèmes différentiels quadratiques discontinus, seul le problème du centre et la bifurcation de Hopf ont été étudiés partiellement, voir [17], [16], [20]. Des études connexes sur le nombre de cycles limites bifurquant du centre et du centre isochrone dont certains perturbés par des systèmes quadratiques discontinus peuvent être trouvées dans [11], [13]. En utilisant la méthode de moyennisation du premier ordre, nous étudions le nombre maximum de cycles limites qui peuvent bifurquer des orbites périodiques du centre isochrone (3.1) et (3.2) perturbés d'une classe des systèmes différentiels polynomiaux quadratiques discontinus

$$\dot{X}_i = Z_i(x,y) = \begin{cases} Y_1^i(x,y) \text{ si } y > 0, \\ Y_2^i(x,y) \text{ si } y < 0, \end{cases} \tag{3.3}$$

$i = 1, 2$, où

$$\begin{aligned} Y_1^1(x,y) &= \begin{pmatrix} -y + x^2 + \varepsilon p_1(x,y) \\ x + xy + \varepsilon q_1(x,y) \end{pmatrix}, \\ Y_2^1(x,y) &= \begin{pmatrix} -y + x^2 + \varepsilon p_2(x,y) \\ x + xy + \varepsilon q_2(x,y) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_1^2(x,y) &= \begin{pmatrix} -y + x^2 - y^2 + \varepsilon p_1(x,y) \\ x + 2xy + \varepsilon q_1(x,y) \end{pmatrix}, \\ Y_2^2(x,y) &= \begin{pmatrix} -y + x^2 - y^2 + \varepsilon p_2(x,y) \\ x + 2xy + \varepsilon q_2(x,y) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

avec ε est un paramètre suffisamment petit, et

$$\begin{aligned} p_1(x,y) &= a_1x + a_2y + a_3xy + a_4x^2 + a_5y^2, \\ q_1(x,y) &= b_1x + b_2y + b_3xy + b_4x^2 + b_5y^2, \\ p_2(x,y) &= c_1x + c_2y + c_3xy + c_4x^2 + c_5y^2, \\ q_2(x,y) &= d_1x + d_2y + d_3xy + d_4x^2 + d_5y^2. \end{aligned} \tag{3.4}$$

En d'autres termes, dans un certain sens, nous étendons le travail effectué par Chicone et Jacobs [14] pour les systèmes différentiels polynomiaux quadratiques continus aux systèmes discontinus avec la ligne droite de discontinuité $y = 0$.

Tableau 1 : Le nombre de cycles limites pour le QPDS.

Centres isochrones quadratiques	Le nombre de cycles limites pour le	
	QPDS continu	QPDS discontinu
$\begin{cases} \dot{x} = -y + x^2, \\ \dot{y} = x + xy, \end{cases}$	2	5
$\begin{cases} \dot{x} = -y + x^2 - y^2, \\ \dot{y} = x + 2xy, \end{cases}$	1	4
$\begin{cases} \dot{x} = -y - \frac{4}{3}x^2, \\ \dot{y} = x - \frac{16}{3}xy, \end{cases}$	2	?
$\begin{cases} \dot{x} = -y + \frac{16}{3}x^2 - \frac{4}{3}y^2, \\ \dot{y} = x + \frac{8}{3}xy, \end{cases}$	2	?

Le système (3.3) peut être écrit en utilisant la fonction sign sous la forme

$$\dot{X}_i = Z_i(x, y) = G_1^i(x, y) + \text{sign}(y)G_2^i(x, y), \tag{3.5}$$

où

$$G_1^i(x, y) = \frac{1}{2}\left(Y_1^i(x, y) + Y_2^i(x, y)\right),$$

et

$$G_2^i(x, y) = \frac{1}{2}(Y_1^i(x, y) - Y_2^i(x, y)),$$

pour $i = 1, 2$.
Nos principaux résultats sont les suivants.

Théorème 3.1.1 *Pour $|\varepsilon| \neq 0$ suffisamment petit, il existe un système différentiel polynomial quadratique discontinu* (3.3) *avec $i = 1$ ayant au moins* 5 *cycles limites bifurquant des orbites périodiques du centre isochrone* (3.1).

Théorème 3.1.2 *Pour $|\varepsilon| \neq 0$ suffisamment petit, il existe un système différentiel polynomial quadratique discontinu* (3.3) *avec $i = 2$ ayant au moins* 4 *cycles limites bifurquant des orbites périodiques du centre isochrone* (3.2).

Nous rappelons que la perturbation des orbites périodiques des centres isochrones (3.1) et (3.2) d'une classe des systèmes différentiels polynomiaux quadratiques continus produit respectivement au plus 2 et 1 cycles limites (voir [14]). Donc, en comparant les résultats obtenus pour le discontinu avec les résultats pour les systèmes différentiels polynomiaux quadratiques continus, ce travail montre que les systèmes discontinus ont au moins 3 cycles limites de plus entourant l'origine que les systèmes continus lorsque nous avons perturbé les centres (3.1) et (3.2), respectivement. En résumé, les résultats sur le nombre de cycles limites qui peuvent bifurquer des orbites périodiques des centres isochrones quadratiques lorsqu'ils sont perturbés d'une classe de tous les systèmes différentiels polynomiaux quadratiques continus ou discontinus

(QPDS) de la forme (3.3) sont résumés dans le tableau 1. Les nombres de la colonne 2 du tableau 1 sont le nombre maximum de cycles limites pour le QPDS continu qui ont été obtenus par Chicone et Jacobs dans [14]. Les nombres de la colonne 3 du tableau 1 sont le nombre maximum de cycles limites pour le QPDS discontinu qui peut être obtenue en utilisant la méthode de moyennisation du premier ordre. Ce résultat indique seulement que le nombre maximum de cycles limites qui peuvent bifurquer des solutions périodiques du centre isochrone non perturbé lorsqu'ils sont perturbés d'une classe des QPDS discontinus est au moins ceux qui apparaissent dans cette troisième colonne. Le nombre maximum exact de ces cycles limites est inconnu.

3.2 Preuve des théorèmes 3.1.1 et 3.1.2

3.2.1 Preuve de théorème 3.1.1

Nous rappelons que l'anneau périodique d'un centre est l'anneau topologique formé par toutes les orbites périodiques entourant le centre, et aucun autre point singulier.
Les expressions de l'intégrale première H et facteur intégrant μ dans l'anneau de période du centre du système (3.1) ont $H(x,y) = (x^2+y^2)/(1+y)^2$ et $\mu(x,y) = 2/(1+y)^3$, respectivement ; pour plus de détails, voir [5]. Pour ce système, notons que $h_1 = 0$,$h_2 = 1$, et la fonction ρ satisfaisons les hypothèses du théorème 2.2.1 est $\rho(R,\varphi) = R/(1-R\sin\varphi)$, $\forall 0 < R < 1$ et $\varphi \in [0, 2\pi)$.
Ensuite, en utilisant le Théorème 2.2.1, le système (3.3) s'écrit

$$\frac{dR}{d\varphi} = \begin{cases} \varepsilon \dfrac{A(\varphi,a,b)\,R + B(\varphi,a,b)\,R^2 + C(\varphi,a,b)\,R^3}{(1-R\sin\varphi)} + O(\varepsilon^2) \text{ si } y > 0, \\ \varepsilon \dfrac{A(\varphi,c,d)\,R + B(\varphi,c,d)\,R^2 + C(\varphi,c,d)\,R^3}{(1-R\sin\varphi)} + O(\varepsilon^2) \text{ si } y < 0, \end{cases} \tag{3.6}$$

où

$$\begin{aligned} A(\varphi,a,b) &= a_1\cos^2\varphi + (a_2+b_1)\cos\varphi\sin\varphi + b_2\sin^2\varphi, \\ B(\varphi,a,b) &= (a_4-b_1)\cos^3\varphi + (-a_1+a_3-b_2+b_4)\cos^2\varphi\sin\varphi \\ &\quad + (-a_2+a_5-b_1+b_3)\cos\varphi\sin^2\varphi + (-b_2+b_5)\sin^3\varphi, \\ C(\varphi,a,b) &= -b_4\cos^4\varphi + b_1\cos^3\varphi\sin\varphi + (b_2-b_4-b_5)\cos^2\varphi\sin^2\varphi \\ &\quad + (b_1-b_3)\cos\varphi\sin^3\varphi + (b_2-b_5)\sin^4\varphi, \end{aligned}$$

et $a = (a_1,...,a_5)$,$b = (b_1,...,b_5)$,$c = (c_1,...,c_5)$ et $d = (d_1,...,d_5)$. Notez que le système (3.1) a la ligne droite invariante $y = -1$. Ainsi la distance minimale de la frontière externe de l'anneau de période du centre à l'origine est 1. Le système différentiel discontinu (3.6) est sous les hypothèses du théorème 2.1.1.
Il faut donc étudier les zéros de la fonction moyenne $f : (0,1) \to \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(R) &= \int_0^{\pi} \frac{A(\varphi,a,b)\,R + B(\varphi,a,b)\,R^2 + C(\varphi,a,b)\,R^3}{(1-R\sin\varphi)} d\varphi, \\ &\quad + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{A(\varphi,c,d)\,R + B(\varphi,c,d)\,R^2 + C(\varphi;c,d)\,R^3}{(1-R\sin\varphi)} d\varphi. \end{aligned}$$

En calculant l'intégrale de ces expressions, on obtient

$$\begin{aligned} f(R) &= (a_1+c_1)g_1 + a_3 g_2 + b_2 g_3 + b_4 g_4 + b_5 g_5 + \\ &\quad c_3 g_6 + d_2 g_7 + d_4 g_8 + d_5 g_9, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{\pi R}{2}, \\ g_2 &= 2 + \frac{\pi}{R} + \frac{1}{2R\sqrt{1-R^2}}\left(-2\pi + 2\pi R^2 - \left(4-4R^2\right)\arcsin R\right), \\ g_3 &= \frac{\pi R}{2} - 2R^2, \\ g_4 &= 2 + \frac{\pi}{R} - \frac{3\pi R}{2} - 2R^2 \\ &\quad + \frac{1}{2R\sqrt{1-R^2}}\left(-2\pi + 4\pi R^2 - 2\pi R^4 + \left(-4+8R^2-4R^4\right)\arcsin R\right), \\ g_5 &= -2 - \frac{\pi}{R} + \frac{\pi R}{2} + 2R^2 + \frac{1}{2R\sqrt{1-R^2}}\left(2\pi - 2\pi R^2 + \left(4-4R^2\right)\arcsin R\right), \\ g_6 &= -2 + \frac{\pi}{R} - \frac{\pi R}{2} - \frac{2\sqrt{1-R^2}\arccos R}{R}, \\ g_7 &= \frac{\pi R}{2} + 2R^2, \\ g_8 &= -2 + \frac{\pi}{R} - \frac{3\pi R}{2} + 2R^2 + 2\left(R - \frac{1}{R}\right)\sqrt{1-R^2}\arccos R, \\ g_9 &= 2 - \frac{\pi}{R} + \frac{\pi R}{2} - 2R^2 + \frac{2\sqrt{1-R^2}\arccos R}{R}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

On note les égalités

$$\begin{aligned} g_5 &= g_1 - g_2 - g_3, \\ g_7 &= 2g_1 - g_3, \\ g_9 &= -g_1 + g_3 - g_6. \end{aligned}$$

Ainsi la fonction f peut être écrite comme

$$\begin{aligned} f(R) &= (a_1 + b_5 + c_1 + 2d_2 - d_5)\, g_1 + (a_3 - b_5)\, g_2 \\ &\quad + (b_2 - b_5 - d_2 + d_5)\, g_3 + b_4 g_4 + (c_3 - d_5)\, g_6 + d_4 g_8. \end{aligned}$$

Les six fonctions $g_i : (0,1) \to \mathbb{R}$, $i \in \{1,2,3,4,6,8\}$ données en (3.7) sont linéairement indépendantes. En effet, nous obtenons la série de Taylor en 0 pour les fonctions g_1, g_2, g_3, g_4, g_6 et g_8 :

$$\begin{aligned} g_1(R) &= \frac{\pi}{2}R + O\left(R^7\right), \\ g_2(R) &= \frac{2}{3}R^2 + \frac{\pi}{8}R^3 + \frac{4}{15}R^4 + \frac{16}{105}R^6 + O\left(R^7\right), \\ g_3(R) &= \frac{\pi}{2}R - 2R^2 + O\left(R^7\right), \\ g_4(R) &= \frac{2}{3}R^2 - \frac{3\pi}{8}R^3 - \frac{2}{5}R^4 - \frac{\pi}{16}R^5 - \frac{4}{35}R^6 + O\left(R^7\right), \\ g_6(R) &= -\frac{2}{3}R^2 + \frac{\pi}{8}R^3 - \frac{4}{15}R^4 + \frac{\pi}{16}R^5 - \frac{16}{105}R^6 + O\left(R^7\right), \\ g_8(R) &= -\frac{2}{3}R^2 - \frac{3\pi}{8}R^3 + \frac{2}{5}R^4 - \frac{\pi}{16}R^5 + \frac{4}{35}R^6 + O\left(R^7\right). \end{aligned}$$

Le déterminant de la matrice des coefficients des variables R,R^2,R^3,R^4,R^5,R^6 est non nul. Par la Proposition 2.2.1 puisque les six fonctions g_1,g_2,g_3,g_4,g_6,g_8 sont linéairement indépendants, alors il existe une combinaison linéaire de leur avec au moins 5 zéros. Plus sur les coefficients des fonctions g_i, pour i = 1,2,3,4,6,8 dans l'expression de sont des fonctions linéaires des variables a_1,a_3,b_2,b_4,b_5,c_1,c_3,d_2,d_4,d_5. Le rang de la matrice Jacobienne des coefficients de g_1,g_2,g_3,g_4,g_6 et g_8 dans $f(R)$ en les variables a_1,a_3,b_2,b_4,b_5,c_1,c_3,d_2,d_4,d_5 est 6. Il existe donc R_1,R_2,R_3,R_4,$R_5 \in (0,1)$ et les coefficients a_j,b_j,c_j,$d_j \in \mathbb{R}$, j = 1,...,5 tels que $f(R_i) = 0$ pour i = 1,...,5. En bref, il existe des systèmes différentiels polynomiaux quadratiques discontinus (3.3) ayant au moins 5 cycles limites bifurquant des orbites périodiques du centre isochrone $\dot{x} = -y + x^2$,$\dot{y} = x + xy$, en utilisant la méthode de moyennisation du premier ordre pour les systèmes différentiels discontinus. Ceci complète la preuve du théorème 3.1.1.

3.2.2 Preuve de théorème 3.1.2

Les expressions de l'intégrale première H et facteur intégrant μ dans l'anneau de période du centre du système (3.1) ont $H(x,y) = (x^2+y^2)/(1+2y)$ et $\mu(x,y) = 2/(1+2y)^2$, respectivement ; pour plus de détails, voir [10]. Pour ce système, nous notons que $h_1 = 0$, $h_2 = 1$, et que la fonction ρ qui satisfait les hypothèses du théorème 2.2.1 est donnée par $(R,\varphi) = R^2 \sin\varphi + R\sqrt{R^2 \sin^2\varphi + 1}$ pour tous $R > 0$ et $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Ensuite, en utilisant le théorème 2.2.1, nous transformons le système (3.3) sous la forme

$$\frac{dR}{d\varphi}=\begin{cases}\frac{\varepsilon}{K(\varphi)}\left(D(\varphi,a,b)R+E(\varphi,a,b)R^2+F(\varphi,a,b)R^3+G(\varphi,a,b)R^4\right.\\ \left.+H(\varphi,a,b)R^5+I(\varphi,a,b)R^6+J(\varphi,a,b)R^7\right)+O(\varepsilon^2) & \text{si } y>0,\\ \frac{\varepsilon}{K(\varphi)}\left(D(\varphi,c,d)R+E(\varphi,c,d)R^2+F(\varphi,c,d)R^3+G(\varphi,c,d)R^4\right.\\ \left.+H(\varphi,c,d)R^5+I(\varphi,c,d)R^6+J(\varphi,c,d)R^7\right)+O(\varepsilon^2) & \text{si } y<0,\end{cases} \tag{3.8}$$

où

$$\begin{aligned}
D(\varphi,a,b) &= a_1\cos^2\varphi+(a_2+b_1)\cos\varphi\sin\varphi+b_2\sin^2\varphi,\\
E(\varphi,a,b) &= \sqrt{1+R^2\sin^2\varphi}\left((a_4-b_1)\cos^3\varphi+(4a_1+a_3-b_2+b_4)\cos^2\varphi\sin\varphi+\right.\\
&\quad \left.(4a_2+a_5+3b_1+b_3)\cos\varphi\sin^2\varphi+(3b_2+b_5)\sin^3\varphi\right),\\
F(\varphi,a,b) &= b_4\cos^4\varphi+(5a_4-3b_1-b_3)\cos^3\varphi\sin\varphi\\
&\quad +(8a_1+5a_3-3b_2+4b_4-b_5)\cos^2\varphi\sin^2\varphi\\
&\quad +(8a_2+5a_5+5b_1+4b_3)\cos\varphi\sin^3\varphi+(5b_2+4b_5)\sin^4\varphi,\\
G(\varphi,a,b) &= \sqrt{1+R^2\sin^2\varphi}\left(4b_4\cos^4\varphi\sin\varphi+4(3a_4-b_1-b_3)\cos^3\varphi\sin^2\varphi\right.\\
&\quad +4(2a_1+3a_3-b_2+2b_4-b_5)\cos^2\varphi\sin^3\varphi+\\
&\quad \left.+4(2a_2+3a_5+b_1+2b_3)\cos\varphi\sin^4\varphi+4(b_2+2b_5)\sin^5\varphi\right),\\
H(\varphi,a,b) &= 8b_4\cos^4\varphi\sin^2\varphi+4(5a_4-b_1-2b_3)\cos^3\varphi\sin^3\varphi+\\
&\quad 4(2a_1+5a_3-b_2+3b_4-2b_5)\cos^2\varphi\sin^4\varphi+\\
&\quad 4(2a_2+5a_5+b_1+3b_3)\cos\varphi\sin^5\varphi+4(b_2+3b_5)\sin^6\varphi,\\
I(\varphi,a,b) &= \sqrt{1+R^2\sin^2\varphi}\left(8b_4\cos^4\varphi\sin^3\varphi+8(2a_4-b_3)\cos^3\varphi\sin^4\varphi+\right.\\
&\quad \left.8(2a_3+b_4-b_5)\cos^2\varphi\sin^5\varphi+8(2a_5+b_3)\cos\varphi\sin^6\varphi+8b_5\sin^7\varphi\right),\\
J(\varphi,a,b) &= 8b_4\cos^4\varphi\sin^4\varphi+8(2a_4-b_3)\cos^3\varphi\sin^5\varphi+8(2a_3+b_4-b_5)\cos^2\varphi\sin^6\varphi\\
&\quad +8(2a_5+b_3)\cos\varphi\sin^7\varphi+8b_5\sin^8\varphi,\\
K(\varphi) &= \left(1+R^2\sin^2\varphi+R\sin\varphi\sqrt{1+R^2\sin^2\varphi}\right)\times\\
&\quad \left(1+2R^2\sin^2\varphi+2R\sin\varphi\sqrt{1+R^2\sin^2\varphi}\right)^2,
\end{aligned}$$

et $a=(a_1,...,a_5), b=(b_1,...,b_5), c=(c_1,...,c_5)$ et $d=(d_1,...,d_5)$.
Notez que le système (3.2) a la droite invariante $y=-1/2$. Ainsi la distance minimale de la frontière externe de l'anneau de période du centre à l'origine est $1/2$.
Le système différentiel discontinu (3.8) est dans les acceptions du théorème 2.1.1. Ainsi, nous devons étudier les racines de la fonction ramenée à une moyenne

$f : (0, \frac{1}{2}) \to \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(R) &= \int_0^{\pi} \frac{1}{K(\varphi)} \left(D(\varphi,a,b) R + E(\varphi,a,b) R^2 + F(\varphi,a,b) R^3 \right. \\ &\quad \left. + G(\varphi,a,b) R^4 + H(\varphi,a,b) R^5 + I(\varphi,a,b) R^6 + J(\varphi,a,b) R^7 \right) d\varphi + \\ &\quad \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1}{K(\varphi)} \left(D(\varphi,c,d) R + E(\varphi,c,d) R^2 + F(\varphi,c,d) R^3 + \right. \\ &\quad \left. G(\varphi,c,d) R^4 + H(\varphi,c,d) R^5 + I(\varphi,c,d) R^6 + J(\varphi,c,d) R^7 \right) d\varphi. \end{aligned}$$

On calcule des intégrales et on obtient

$$f(R) = a_1 g_1 + a_3 g_2 + b_2 g_3 + b_4 g_4 + b_5 g_5 + c_1 g_6 + c_3 g_7 + d_2 g_8 + d_4 g_9 + d_5 g_{10}.$$

Où

$$\begin{aligned} g_1 &= 1 + \frac{\pi}{2} R - \frac{1}{R} \arctan R - R \arctan R, \\ g_2 &= -1 + \frac{1}{R} \arctan R + R \arctan R, \\ g_3 &= -1 + \frac{\pi}{2} R - 2R^2 + \pi R^3 + \arctan R \left(\frac{1}{R} - R - 2R^3 \right), \\ g_4 &= -1 - R^2 - \frac{\pi}{2} R^3 + \arctan R \left(\frac{1}{R} + 2R + R^3 \right), \\ g_5 &= 1 + R^2 - \frac{\pi}{2} R^3 + \arctan R \left(-\frac{1}{R} + R^3 \right), \\ g_6 &= -1 + \frac{\pi}{2} R + \arctan R \left(\frac{1}{R} + R \right), \\ g_7 &= 1 + \arctan R \left(-\frac{1}{R} - R \right), \\ g_8 &= 1 + \frac{\pi}{2} R + 2R^2 + \pi R^3 + \arctan R \left(-\frac{1}{R} + R + 2R^3 \right), \\ g_9 &= 1 + R^2 - \frac{\pi}{2} R^3 + \arctan R \left(-\frac{1}{R} - 2R - R^3 \right), \\ g_{10} &= -1 - R^2 - \frac{\pi}{2} R^3 + \arctan R \left(\frac{1}{R} - R^3 \right). \end{aligned}$$

Nous avons les égalités

$$\begin{aligned} g_5 &= \frac{1}{2}(g_1 - g_3), \\ g_6 &= g_1 + 2g_2, \\ g_7 &= -g_2, \\ g_9 &= \frac{1}{4}\left(4g_1 + 4g_2 - 2g_3 - 4g_4 - 2g_8\right), \\ g_{10} &= g_2 + \frac{1}{2}\left(g_1 - g_8\right). \end{aligned}$$

Ainsi la fonction f peut être écrite comme

$$\begin{aligned} f(R) &= \left(a_1 + c_1 + d_4 + \frac{1}{2}\left(b_5 + d_5\right)\right) g_1 + (a_3 + 2c_1 - c_3 + d_4 + d_5) g_2 \\ &\quad + \left(b_2 - \frac{1}{2}\left(b_5 + d_4\right)\right) g_3 + \left(b_4 - d_4\right) g_4 + \left(d_2 - \frac{1}{2}\left(d_4 + d_5\right)\right) g_8. \end{aligned}$$

En effet, nous obtenons la série de Taylor en 0 pour les fonctions g_1, g_2, g_3, g_4 et g_8

$$\begin{aligned} g_1(R) &= \frac{\pi}{2}R - \frac{2}{3}R^2 + \frac{2}{15}R^4 - \frac{2}{35}R^6 + O\left(R^7\right), \\ g_2(R) &= \frac{2}{3}R^2 - \frac{2}{15}R^3 + \frac{2}{35}R^6 + O\left(R^7\right), \\ g_3(R) &= \frac{\pi}{2}R - \frac{10}{3}R^2 + \pi R^3 - \frac{22}{15}R^4 + \frac{34}{105}R^6 + O\left(R^7\right), \\ g_4(R) &= \frac{2}{3}R^2 - \frac{\pi}{2}R^3 + \frac{8}{15}R^4 - \frac{8}{105}R^6 + O\left(R^7\right), \\ g_8(R) &= \frac{\pi}{2}R + \frac{10}{3}R^2 + \pi R^3 + \frac{22}{15}R^4 - \frac{34}{105}R^6 + O\left(R^7\right). \end{aligned}$$

Le déterminant de la matrice des coefficients des variables R,R^2,R^3,R^4,R^6 est non nul. Nous avons donc cet ensemble de cinq fonctions $g_i : (0, \frac{1}{2}) \to \mathbb{R}$, donné par $\{g_1,g_2,g_3,g_4,g_8\}$ est linéairement indépendant. Par la proposition 2.2.1 puisque les cinq fonctions g_1, g_2, g_3, g_4, g_8 sont linéairement indépendantes, il existe alors une combinaison linéaire d'entre elles avec au moins 4 zéros. De plus les coefficients des fonctions g_i,$i = 1,2,3,4,8$ dans l'expression de f sont des fonctions linéaires des variables a_1,a_3,b_2,b_4,b_5,c_1,c_3,d_2,d_4,d_5.Le rang de la matrice jacobienne du coefficient de g_1,g_2,g_3,g_4 et g_8 dans $f(R)$ en les variables a_1,a_3,b_2,b_4,b_5,c_1,c_3,d_2,d_4,d_5 est 5. Il existe donc R_1,R_2,R_3,$R_4 \in (0, \frac{1}{2})$ et les coefficients a_j,b_j,c_j,$d_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, ..., 5$ tels que $f(R_i) = 0$ pour $i = 1$,...,4.

En bref, il existe des systèmes différentiels polynomiaux quadratiques discontinus (3.3) ayant au moins 4 cycles limites bifurquant des orbites périodiques du centre isochrone $\dot{x} = -y + x^2 - y^2$, $\dot{y} = x + 2xy$, en utilisant la méthode de moyennisation du premier ordre pour les systèmes différentiels discontinus. Ceci complète la preuve du théorème 3.1.2.

CHAPITRE 4

Bifurcation de second ordre des cycles Limites d'un centre réversible quadratique

Dans ce chapitre, on va utiliser la méthode de moyennisation du chapitre 2 pour étudier le nombre maximum des cycles limites du système différentiel perturbé suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + xy + \sum_{k=1}^{2} \varepsilon^k \sum_{i+j=2} a_{i,j}^{(k)} x^i y^j, \\ \dot{y} = x + y^2 + \sum_{k=1}^{2} \varepsilon^k \sum_{i+j=2} b_{i,j}^{(k)} x^i y^j, \end{cases}$$

où ε est un paramètre suffisamment petit.

4.1 Introduction

Dans la théorie qualitative des systèmes différentiels réels plans, l'un des problèmes importants est de déterminer le nombre de cycles limites. Pour résoudre ce problème, des méthodes innovantes ont été proposées à partir de la section de Poincaré [9], [14], [33], les intégrales Poincaré-Pontryagin-Melnikov ou les intégrales abéliennes [1], [2], [18], [43], le Facteur intégrant inverse [22], [23], [24], [42], et la méthode de moyennisation [4], [19], [21], [31], [32], [35] qui est en fait équivalente aux intégrales abéliennes dans le plan. La méthode de moyennisation est l'un des outils puissants pour étudier les cycles limites, ce qui peut réduire le problème du nombre de cycles limites de certains systèmes différentiels à l'exploration du nombre de points d'équilibre hyperbolique de leurs équations différentielles moyennes. En utilisant la méthode de moyennisation, des résultats élégants sur le nombre de cycles limites des systèmes différentiels ont été obtenus, comme par Buic a et Llibre [8], par Gine et Llibre [21], par Li et Llibre [32] et ainsi de suite. Dans ce chapitre, on

commence par le système quadratique

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x, \\ \dot{y} = x + y^2, \end{cases} \tag{4.1}$$

et étudier la bifurcation de second ordre des cycles limites sous de petites perturbations homogènes quadratiques. De toute évidence, le système (4.1) a

$$H(x,y) = \frac{1-x}{\sqrt{x^2+y^2}} = c,$$

comme son intégrale première avec le facteur intégrant $1/(x^2+y^2)^{3/2}$ et a la singularité finie unique $(0,0)$ comme centre isochrone. Supposons que le système (4.1) a un anneau périodique

$$\{(x,y)|H(x,y) = c, \quad c \in (1,+\infty)\}.$$

En utilisant la méthode de la moyennisation, nous étudions la bifurcation des cycles limites pour le système (4.1) sous de petites perturbations homogènes quadratiques. Notre principal résultat est le suivant.

Théorème 4.1.1 *pour tout paramètre suffisamment petit $|\varepsilon|$, et toutes constantes réelles $a_{i,j}^{(k)}$ et $b_{i,j}^{(k)}$ $(i,j=0,1,2,k=1,2)$, on considère le système perturbé homogène quadratique*

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + xy + \sum\limits_{k=1}^{2} \varepsilon^k \sum\limits_{i+j=2} a_{i,j}^{(k)} x^i y^j, \\ \dot{y} = x + y^2 + \sum\limits_{k=1}^{2} \varepsilon^k \sum\limits_{i+j=2} b_{i,j}^{(k)} x^i y^j, \end{cases} \tag{4.2}$$

nous avons
(1) *En utilisant la méthode de moyennisation du premier ordre, le système* (4.2) *a au plus un cycle limite bifurquant des orbites périodiques du système non perturbé* (4.1)*, et cette borne supérieure est nette.*
(2) *En utilisant la méthode de moyennisation du second ordre, le système* (4.2) *a au plus un cycle limite bifurquant des orbites périodiques du système non perturbé* (4.1)*, et cette borne supérieure est nette.*

4.2 Bifurcation du cycle limite de premier ordre

Il est à noter que pour les systèmes intégrables et non hamiltoniens, il est généralement difficile de trouver des transformations appropriées comme décrit dans le lemme 2.4.1.
Pour l'intégrale première du système (4.1)

$$H(x,y) = \frac{1-x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

on choisit la fonction $\rho = \rho(R, \varphi)$ comme suit

$$\rho(R, \varphi) = \frac{1}{R^2 + \cos\varphi}, \tag{4.3}$$

tel que

$$H\left(\rho(R, \varphi)\cos\varphi, \rho(R, \varphi)\sin\varphi\right) = R^2.$$

En appliquant le lemme 2.4.1 au système (4.2), nous obtenons le résultat suivant

Lemme 4.2.1 *En utilisant le changement* $x = \rho(R, \varphi)\cos\varphi$ *et* $y = \rho(R, \varphi)\sin\varphi$ *pour* $\varphi \in [0, 2\pi)$, *le système* (4.2) *devient*

$$\begin{aligned}\frac{dR}{d\varphi} &= \frac{1}{2R}\left\{\varepsilon\frac{(Qp_1 - Pq_1)}{(x^2+y^2)^{3/2}} + \varepsilon^2\left[\frac{(Qp_2 - Pq_2)}{(x^2+y^2)^{3/2}} - \right.\right. \\ &\left.\left.\frac{(Qp_1 - Pq_1)(xq_1 - yp_1)}{(x^2+y^2)^{5/2}}\right]\right\}\Bigg|_{x=\rho(R,\varphi)\cos\varphi, y=\rho(R,\varphi)\sin\varphi} + O(\varepsilon^3),\end{aligned} \tag{4.4}$$

où

$$\begin{aligned}Qp_k - Pq_k &= -b_{2,0}^{(k)}x^3y + (a_{2,0}^{(k)} - b_{1,1}^{(k)})x^2y^2 + (a_{1,1}^{(k)} - b_{0,2}^{(k)})xy^3 + a_{0,2}^{(k)}y^4 \\ &\quad + a_{2,0}^{(k)}x^3 + (a_{1,1}^{(k)} - b_{2,0}^{(k)})x^2y + (a_{0,2}^{(k)} + b_{1,1}^{(k)})xy^2 + b_{0,2}^{(k)}y^3, \\ xq_k - yp_k &= b_{2,0}^{(k)}x^3 + (b_{1,1}^{(k)} - a_{2,0}^{(k)})x^2y + (b_{0,2}^{(k)} - a_{1,1}^{(k)})xy^2 - a_{0,2}^{(k)}y^3,\end{aligned}$$

et $a_{i,j}^{(k)}$ *et* $b_{i,j}^{(k)}$ $(i, j = 0,1,2, k = 1,2)$ *sont réels, et* $\rho(R, \varphi)$ *donné par* (4.3).

Lemme 4.2.2 *Soient les égalités suivantes.*

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2\varphi\sin^2\varphi}{R^2+\cos\varphi}d\varphi &= \pi\left(2R^6 - R^2 - 2\frac{R^8 - R^4}{\sqrt{R^4-1}}\right), \\ \int_0^{2\pi}\frac{\sin^4\varphi}{R^2+\cos\varphi}d\varphi &= \pi\left(-2R^6 + 3R^2 + 2\frac{R^8 - 2R^4 + 1}{\sqrt{R^4-1}}\right).\end{aligned}$$

Proposition 4.2.1 *La fonction moyenne du premier ordre associée au système* (4.4) *a au plus un zéro simple, et cette borne supérieure peut être atteinte.*

Preuve. L'équation moyenne du premier ordre correspondant au système (4.4) est

$$\dot{R} = \varepsilon F_1^0(R), \tag{4.5}$$

où

$$\begin{aligned} F_1^0(R) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{Qp_1 - Pq_1}{2R(x^2+y^2)^{3/2}}\right]\Big|_{x=\rho(R,\varphi)\cos\varphi, y=\rho(R,\varphi)\sin\varphi} d\varphi \qquad (4.6)\\ &= \frac{1}{4\pi R}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{1}{R^2+\cos\varphi}\left[(a_{2,0}^{(1)} - b_{1,1}^{(1)})\cos^2\varphi\sin^2\varphi + a_{0,2}^{(1)}\sin^4\varphi\right]\right\} d\varphi. \end{aligned}$$

En utilisant le lemme 4.2.2 dans (4.6), nous obtenons

$$\begin{aligned} F_1^0(R) &= \frac{1}{4R}\left\{\left(2a_{2,0}^{(1)} - 2b_{1,1}^{(1)} - 2a_{0,2}^{(1)}\right)R^6 + \left(-a_{2,0}^{(1)} + b_{1,1}^{(1)} + 3a_{0,2}^{(1)}\right)R^2 \right. \qquad (4.7)\\ &\quad \left. + \left[\left(-a_{2,0}^{(1)} + 2b_{1,1}^{(1)} + 2a_{0,2}^{(1)}\right)R^8 + \left(2a_{2,0}^{(1)} - 2b_{1,1}^{(1)} - 4a_{0,2}^{(1)}\right)R^4 + 2a_{0,2}^{(1)}\right]\frac{1}{\sqrt{R^4-1}}\right\}. \end{aligned}$$

Rappelons que $R > 1$, et on pose

$$R^2 = \frac{1+\omega^2}{1-\omega^2},$$

pour $0 < \omega < 1$. Alors la formule (4.7) devient

$$\begin{aligned} g(w) &= F_0^1(R)|_{R^2=(1+\omega^2/1-\omega^2)}\\ &= \frac{\sqrt{1-\omega^2}}{4\sqrt{1+\omega^2}}\left\{\left(2a_{2,0}^{(1)} - 2b_{1,1}^{(1)} - 2a_{0,2}^{(1)}\right)\frac{(1+\omega^2)^3}{(1-\omega^2)^3}\right.\\ &\quad + \left(-a_{2,0}^{(1)} + b_{1,1}^{(1)} + 3a_{0,2}^{(1)}\right)\frac{1+\omega^2}{1-\omega^2} + \left(-a_{2,0}^{(1)} + b_{1,1}^{(1)} + a_{0,2}^{(1)}\right)\frac{(1+\omega^2)^4}{\omega\,(1-\omega^2)^3} \qquad (4.8)\\ &\quad \left. + (a_{2,0}^{(1)} - b_{1,1}^{(1)} - 2a_{0,2}^{(1)})\frac{(1+\omega^2)^2}{\omega(1-\omega^2)} + a_{0,2}^{(1)}\frac{1-\omega^2}{\omega}\right\}\\ &= \frac{(1-\omega^2)^{3/2}}{4(1+\omega^2)^{1/2}(1+\omega)^{5/2}}\left[\left(a_{2,0}^{(1)} - b_{1,1}^{(1)} + a_{0,2}^{(1)}\right)\omega^2 + 4a_{0,2}^{(1)}\omega + a_{2,0}^{(1)} - b_{1,1}^{(1)} + a_{0,2}^{(1)}\right], \end{aligned}$$

pour la fonction $g(w)$, nous savons que si $w_0 \neq 0$ est une solution de $g(w) = 0$, alors $1/w_0$ c'est aussi une solution. Ainsi $g(w)$ a au plus une solution $w \in (0,1)$, ce qui implique qu'il existe au plus une solution $R \in (1,\infty)$ de $F_1^0(R)$. Nous montrerons que cette borne supérieure peut être atteinte en illustrant un exemple.
On considère le système différentiel suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + xy + \varepsilon\left[\left(b_{1,1}^{(1)} + \dfrac{13}{8}\right)x^2 + a_{1,1}^{(1)}xy - \dfrac{5}{8}y^2\right], \\ \dot{y} = x + y^2 + \varepsilon\left(b_{2,0}^{(1)}x^2 + b_{1,1}^{(1)}xy + b_{0,2}^{(1)}y^2\right), \end{cases} \qquad (4.9)$$

où $a_{1,1}^{(1)}$,$b_{2,0}^{(1)}$,$b_{1,1}^{(1)}$ et $b_{0,2}^{(1)}$ sont réels. En utilisant les coordonnées polaires $x = \rho(R,\varphi)\cos\varphi$ et $y = \rho(R,\varphi)\sin\varphi$, le système (4.9) peut être réécrit comme suit

$$\frac{dR}{d\varphi} = \varepsilon G(R,\varphi) + O(\varepsilon^2), \tag{4.10}$$

où

$$\begin{aligned} G(R,\varphi) &= \left[\frac{Qp_1 - Pq_1}{2R(x^2+y^2)^{3/2}}\right]\Bigg|_{x=\rho(R,\varphi)\cos\varphi, y=\rho(R,\varphi)\sin\varphi} \\ &= \frac{1}{2R}\left\{\frac{1}{R^2+\cos\varphi}\left[-b_{2,0}^{(1)}\cos^3\varphi\sin\varphi + \frac{13}{8}\cos^2\varphi\sin\varphi + (a_{1,1}^{(1)} - b_{0,2}^{(1)})\cos\varphi\sin^3\varphi\right.\right. \\ &\quad \left. - \frac{5}{8}\cos^4\varphi\right] + \left[(b_{1,1}^{(1)} + \frac{13}{8})\cos^3\varphi + (a_{1,1}^{(1)} + b_{2,0}^{(1)})\cos^2\varphi\sin\varphi\right. \\ &\quad \left.\left. +(b_{1,1}^{(1)} - \frac{5}{8})\cos\varphi\sin^2\varphi + b_{0,2}^{(1)}\sin^3\varphi\right]\right\}. \end{aligned}$$

$$\frac{dR}{d\varphi} = \varepsilon G_1^0(R), \tag{4.11}$$

où

$$\begin{aligned} G_1^0(R) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} G_1(R,\varphi)d\varphi \\ &= \frac{1}{4\pi R}\int_0^{2\pi}\frac{1}{R^2+\cos\varphi}\left(\frac{13}{8}\cos^2\varphi\sin^2\varphi - \frac{5}{8}\sin^4\varphi\right)d\varphi \qquad (4.12) \\ &= \frac{1}{16R}\left[18R^6 - 14R^2 + (-18R^8 + 23R^4 - 5)\frac{1}{\sqrt{R^4-1}}\right], \\ &= \frac{(1-\omega)^{3/2}}{4(1+\omega^2)^{1/2}(1+\omega)^{5/2}}\left(\omega - \frac{1}{2}\right)(\omega - 2), \end{aligned}$$

où R et ω sont définis comme précédemment. Apparemment, $G_1^0(R)$ a exactement une solution positive, noté par

$$R_0^{(1)} = \frac{\sqrt{15}}{3}. \tag{4.13}$$

Si $\omega_0^{(1)} = 1/2$, alors $R \in (1,+\infty)$. De plus, nous avons

$$\frac{d}{dR}G_1^0(R_0^{(1)}) = -\frac{1}{32} < 0. \tag{4.14}$$

■

Proposition 4.2.2 *Pour $|\varepsilon| \neq 0$ suffisamment petit, le système* (4.2) *a au plus un cycle limite pour la bifurcation du premier ordre résultant de l'anneau de période autour du centre du système non perturbé* (4.1) *avec $\varepsilon = 0$, et cette borne supérieure est nette.*

4.3 Bifurcation de cycle limite de deuxième ordre

Dans cette section, nous étudions le nombre de zéros de la fonction moyenne du second ordre associée au système (4.4), dans le cas où la fonction moyenne du premier ordre $F_0^1(R) \equiv 0$.

Lemme 4.3.1 *pour le système* (4.4), *la fonction moyenne du premier ordre $F_0^1(R) \equiv 0$ est valable si et seulement si*

$$a_{2,0}^{(1)} = b_{1,1}^{(1)}, a_{0,2}^{(1)} = 0. \tag{4.15}$$

Lorsque la condition (4.15) *est vérifiée, la fonction moyenne du second ordre associée au système* (4.4) *prend la forme*

$$F_2^0(R) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{\partial F_1(R,\varphi)}{\partial R}y_1(R,\varphi) + F_2(R,\varphi)\right]d\varphi, \tag{4.16}$$

où

$$\begin{aligned} F_1(R,\varphi) &= \left.\frac{Qp_1 - Pq_1}{2R(x^2+y^2)^{3/2}}\right|_{x=\rho(R,\varphi)\cos\varphi, y=\rho(R,\varphi)\sin\varphi} \\ &= \frac{1}{2R}\left[-b_{2,0}^{(1)}\frac{\cos^3\varphi\sin\varphi}{R^2+\cos\varphi} + \left(a_{1,1}^{(1)} - b_{0,2}^{(1)}\right)\frac{\cos\varphi\sin^3\varphi}{R^2+\cos\varphi}\right. \\ &\quad \left. + \left(a_{1,1}^{(1)} + b_{2,0}^{(1)}\right)\cos^2\varphi\sin\varphi + b_{0,2}^{(1)}\sin^3\varphi + b_{1,1}^{(1)}\cos\varphi\right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_2(R,\varphi) &= \left.\left[\frac{Qp_2 - Pq_2}{2R(x^2+y^2)^{3/2}} - \frac{(Qp_1 - Pq_1)(xq_1 - yp_1)}{2R(x^2+y^2)^{5/2}}\right]\right|_{x=\rho(R,\varphi)\cos\varphi, y=\rho(R,\varphi)\sin\varphi} \\ &= \left.\left[\frac{Qp_2 - Pq_2}{2R(x^2+y^2)^{3/2}}\right]\right|_{x=\rho(R,\varphi)\cos\varphi, y=\rho(R,\varphi)\sin\varphi} \\ &\quad -\frac{\cos(\varphi)}{2R\left(R^2+\cos(\varphi)\right)}\left[\frac{\sin(\varphi)\left(\cos(\varphi)\right)^5\left(b_{0,2}^{(1)}\right)^2}{R^2+\cos(\varphi)} - 2\frac{\sin(\varphi)\left(\cos(\varphi)\right)^5 b_{2,0}^{(1)}b_{0,2}^{(1)}}{R^2+\cos(\varphi)}\right. \\ &\quad +2\frac{\sin(\varphi)\left(\cos(\varphi)\right)^5 b_{2,0}^{(1)}a_{1,1}^{(1)}}{R^2+\cos(\varphi)} + 4\frac{\sin(\varphi)\left(\cos(\varphi)\right)^3 b_{0,2}^{(1)}a_{1,1}^{(1)}}{R^2+\cos(\varphi)} \\ &\quad -2\frac{\sin(\varphi)\cos(\varphi)\, b_{0,2}^{(1)}a_{1,1}^{(1)}}{R^2+\cos(\varphi)} + 2\frac{\sin(\phi)\left(\cos(\varphi)\right)^3 b_{2,0}^{(1)}b_{0,2}^{(1)}}{R^2+\cos(\varphi)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-2\,\frac{\sin(\varphi)\,(\cos(\varphi))^5\,b_{0,2}^{(1)}a_{1,1}^{(1)}}{R^2+\cos(\varphi)}-2\,\frac{\sin(\varphi)\,(\cos(\varphi))^3\,b_{2,0}^{(1)}a_{1,1}^{(1)}}{R^2+\cos(\varphi)}\\
&+(\cos(\varphi))^3\,b_{1,1}^{(1)}b_{0,2}^{(1)}+\cos(\varphi)\,a_{1,1}^{(1)}b_{1,1}^{(1)}-\sin(\varphi)\left(b_{0,2}^{(1)}\right)^2+2\,\sin(\varphi)\,(\cos(\varphi))^2\left(b_{0,2}^{(1)}\right)^2\\
&+\frac{\sin(\varphi)\,(\cos(\varphi))^5\left(a_{1,1}^{(1)}\right)^2}{R^2+\cos(\varphi)}-\sin(\varphi)\,(\cos(\varphi))^4\left(b_{0,2}^{(1)}\right)^2+\frac{\left(b_{2,0}^{(1)}\right)^2(\cos(\varphi))^5\sin(\varphi)}{R^2+\cos(\varphi)}\\
&+2\,\sin(\varphi)\,(\cos(\varphi))^4\,b_{2,0}^{(1)}b_{0,2}^{(1)}+2\,\sin(\varphi)\,(\cos(\varphi))^4\,a_{1,1}^{(1)}b_{0,2}^{(1)}\\
&-3\,\sin(\varphi)\,(\cos(\varphi))^2\,a_{1,1}^{(1)}b_{0,2}^{(1)}-2\,\sin(\varphi)\,(\cos(\varphi))^2\,b_{2,0}^{(1)}b_{0,2}^{(1)}-2\,\frac{\sin(\varphi)\,(\cos(\varphi))^3\left(a_{1,1}^{(1)}\right)^2}{R^2+\cos(\varphi)}\\
&-2\,\frac{\sin(\varphi)\,(\cos(\varphi))^3\left(b_{0,2}^{(1)}\right)^2}{R^2+\cos(\varphi)}-2\,b_{2,0}^{(1)}a_{1,1}^{(1)}\,(\cos(\varphi))^4\sin(\varphi)-\cos(\varphi)\,b_{1,1}^{(1)}b_{0,2}^{(1)}\\
&-(\cos(\varphi))^3\,b_{1,1}^{(1)}b_{2,0}^{(1)}+\sin(\varphi)\,(\cos(\varphi))^2\,b_{2,0}^{(1)}a_{1,1}^{(1)}+\frac{\sin(\varphi)\cos(\varphi)\left(a_{1,1}^{(1)}\right)^2}{R^2+\cos(\varphi)}\\
&+\frac{\sin(\varphi)\cos(\varphi)\left(b_{0,2}^{(1)}\right)^2}{R^2+\cos(\varphi)}-(\cos(\varphi))^3\,a_{1,1}^{(1)}b_{1,1}^{(1)}+\sin(\varphi)\,(\cos(\varphi))^2\left(a_{1,1}^{(1)}\right)^2\\
&+\sin(\varphi)\,a_{1,1}^{(1)}b_{0,2}^{(1)}-\sin(\varphi)\,(\cos(\varphi))^4\left(a_{1,1}^{(1)}\right)^2-\left(b_{2,0}^{(1)}\right)^2(\cos(\varphi))^4\sin(\phi)\Bigg].
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y_1(R,\varphi) &= \int_0^{\varphi}F_1(R,\theta)d\theta=\int_0^{\varphi}\frac{1}{2R}[b_{1,1}^{(1)}\cos^3\theta+\left(a_{1,1}^{(1)}-b_{2,0}^{(1)}\right)\cos^2\theta\sin\theta\\
&\quad+b_{1,1}^{(1)}\cos\theta\sin^2\theta+b_{0,2}^{(1)}\sin^3\theta]d\theta\\
&\quad+\frac{1}{2R}\left[-b_{2,0}^{(1)}\int_0^{\varphi}\frac{\cos^3\theta\sin\theta}{R^2+\cos\theta}d\theta+\left(a_{1,1}^{(1)}-b_{0,2}^{(1)}\right)\int_0^{\varphi}\frac{\cos\theta\sin^3\theta}{R^2+\cos\theta}d\theta\right],
\end{aligned}
$$

et P,Q, p_k et $q_k(k=1,2)$ sont définis comme précédemment. Pour calculer la fonction $y_1(R,\varphi)$, dans ce qui suit, nous devons d'abord déterminer certaines inégalités intégrales.

Lemme 4.3.2 *Soient les égalités suivantes*

$$\begin{aligned}
\int_0^{\varphi} \frac{\cos\theta}{R^2+\cos\theta} d\theta &= -1 + R^2 \ln\left(R^2+1\right) \\
&\quad + \cos\varphi - R^2 \ln\left(R^2+\cos\varphi\right), \\
\int_0^{\varphi} \frac{\cos^3\theta}{R^2+\cos\theta} d\cos\theta &= -R^4 + \frac{1}{2}R^2 - \frac{1}{3} + R^6 \ln\left(R^2+1\right) \\
&\quad + R^4\cos\varphi - \frac{1}{2}R^2\cos^2\varphi + \frac{1}{3}\cos^3\varphi - R^6 \ln\left(R^2+\cos\varphi\right).
\end{aligned}$$

Lemme 4.3.3 *Soient les égalités suivantes*

$$\begin{aligned}
\int_0^{\varphi} \frac{\cos^3\theta\sin\theta}{R^2+\cos\theta} d\theta &= R^4 - \frac{1}{2}R^2 + \frac{1}{3} - R^6 \ln\left(R^2+1\right) - R^4\cos\theta \\
&\quad + \frac{1}{2}R^2\cos^2\varphi - \frac{1}{3}\cos^3\varphi + R^6 \ln\left(R^2+\cos\varphi\right), \\
\int_0^{\varphi} \frac{\cos\theta\sin^3\theta}{R^2+\cos\theta} d\theta &= -R^4 + \frac{1}{2}R^2 + \frac{2}{3} + \left(R^6 - R^2\right)\ln\left(R^2+1\right) + \left(R^4-1\right)\cos\varphi \\
&\quad - \frac{1}{2}R^2\cos^2\varphi + \frac{1}{3}\cos^3\varphi + \left(R^2 - R^6\right)\ln\left(R^2+\cos\varphi\right).
\end{aligned}$$

En utilisant les lemmes 4.3.2 et4.3.3, un calcul simple donne

$$\begin{aligned}
y_1(R,\varphi) &= -\frac{b_{2,0}^{(1)} + a_{1,1}^{(1)} - b_{0,2}^{(1)}}{4} R\cos^2\theta + \left[\frac{b_{2,0}^{(1)} + a_{1,1}^{(1)} - b_{0,2}^{(1)}}{2} R^3 - \frac{a_{1,1}^{(1)}}{2R}\right]\cos\theta + \frac{b_{1,1}^{(1)}}{2R}\sin\theta + \\
&\quad \left[-\frac{b_{2,0}^{(1)} + a_{1,1}^{(1)} - b_{0,2}^{(1)}}{2} R^5 + \frac{a_{1,1}^{(1)} - b_{0,2}^{(1)}}{2R} R\right] \ln\left(R^2+\cos\varphi\right) \qquad (4.17) \\
&\quad + \frac{a_{1,1}^{(1)}}{2R} + \frac{b_{2,0}^{(1)} + a_{1,1}^{(1)} - b_{0,2}^{(1)}}{4} R - \frac{b_{2,0}^{(1)} + a_{1,1}^{(1)} - b_{0,2}^{(1)}}{2} R^3 + \\
&\quad \left[\frac{b_{2,0}^{(1)} + a_{1,1}^{(1)} - b_{0,2}^{(1)}}{2} R^5 - \frac{a_{1,1}^{(1)} - b_{0,2}^{(1)}}{2} R\right] \ln\left(R^2+1\right).
\end{aligned}$$

Lemme 4.3.4 *Soient les égalités suivantes*

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{1}{R^2+\cos\varphi} d\varphi &= \frac{2\pi}{\sqrt{R^2-1}}, \\
\int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi}{R^2+\cos\varphi} d\varphi &= 2\pi\left[-\frac{R^2}{\sqrt{R^4-1}}+1\right], \\
\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\varphi}{R^2+\cos\varphi} d\varphi &= 2\pi\left[\frac{R^4}{\sqrt{R^4-1}}-R^2\right], \\
\int_0^{2\pi} \frac{\cos^3\varphi}{R^2+\cos\varphi} d\varphi &= \pi\left[-\frac{2R^6}{\sqrt{R^4-1}}+2R^4+1\right], \\
\int_0^{2\pi} \frac{\cos^4\varphi}{R^2+\cos\varphi} d\varphi &= \pi\left[\frac{2R^8}{\sqrt{R^4-1}}-2R^6-R^2\right], \\
\int_0^{2\pi} \frac{\cos^5\varphi}{R^2+\cos\varphi} d\varphi &= \frac{\pi}{4}\left[-\frac{8R^{10}}{\sqrt{R^4-1}}+8R^8+4R^4+3\right], \\
\int_0^{2\pi} \frac{\cos^6\varphi}{R^2+\cos\varphi} d\varphi &= -\frac{\pi}{4}\left[-\frac{8R^{12}}{\sqrt{R^4-1}}+8R^{10}+4R^6+3R^2\right], \\
\int_0^{2\pi} \cos\varphi \ln\left(R^2+\cos\varphi\right) d\varphi &= 2\pi\left[R^4-\sqrt{R^4-1}\right].
\end{aligned}$$

Preuve. La plupart des équations intégrales peuvent être obtenues par calcul direct. Ici, nous montrons uniquement la dernière formule. Soit

$$N(r) = \int_0^{2\pi} \cos\varphi \ln\left(1+r\cos\varphi\right) d\varphi, \tag{4.18}$$

où $r = 1/R^2$. Depuis

$$N'(r) = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\varphi}{1+r\cos\varphi} d\varphi = \frac{2\pi\left(1-\sqrt{1-r^2}\right)}{r^2\sqrt{1-r^2}}, \tag{4.19}$$

$N(0) = 0$ on obtient

$$N(r) = \int_0^r N'(s) ds = 2\pi(R^2-\sqrt{R^4-1}), \tag{4.20}$$

ce qui implique la dernière formule du lemme 4.3.4. D'après le lemme 4.3.4, un calcul simple donne le lemme suivant. ■

Lemme 4.3.5 *Soient les égalités suivantes*

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta \sin^4\theta}{R^2+\cos\varphi} d\varphi &= \pi\left[\frac{-2\left(R^{10}-2R^6+R^2\right)}{\sqrt{R^4-1}} + 2R^8 - 3R^4 + \frac{3}{4}\right], \\
\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\theta \sin^4\theta}{R^2+\cos\varphi} d\varphi &= -\frac{\pi}{4}\left[\frac{-8R^{12}+16R^8-8R^4}{\sqrt{R^4-1}} + 8R^{10} + 12R^6 + 3R^3\right], \\
\int_0^{2\pi} \frac{\cos^3\theta \sin^2\theta}{R^2+\cos\varphi} d\varphi &= \pi\left[\frac{2\left(R^{10}-R^6\right)}{\sqrt{R^4-1}} - 2R^8 + R^4 + \frac{1}{4}\right], \\
\int_0^{2\pi} \frac{\cos^4\theta \sin^2\theta}{R^2+\cos\varphi} d\varphi &= \frac{\pi}{4}\left[\frac{-8R^{12}+8R^8}{\sqrt{R^4-1}} + 8R^{10} - 4R^6 - R^2\right], \\
\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta \sin^4\theta}{\left(R^2+\cos\varphi\right)^2} d\varphi &= 2\pi\left[\frac{4R^8-3R^4}{\sqrt{R^4-1}} - 4R^6 + R^2\right], \\
\int_0^{2\pi} \frac{\cos^3\theta \sin^2\theta}{\left(R^2+\cos\varphi\right)^2} d\varphi &= -2\pi\left[\frac{-4R^8+3R^4}{\sqrt{R^4-1}} + 4R^6 - R^2\right].
\end{aligned}$$

Proposition 4.3.1 *Dans la condition* (4.15)*, la fonction moyenne du second ordre associée au système* (4.15) *a au plus deux solutions simples, et cette borne supérieure peut être atteinte.*

Preuve. On définit les fonctions

$$F_{21}^0(R) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial F_1(R,\varphi)}{\partial R} y_1(R,\varphi) d\varphi, \;\; F_{22}^0(R) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F_2(R,\varphi) d\varphi.$$

Alors (4.16) devient

$$F_2^0(R) = F_{21}^0(R) + F_{22}^0(R). \tag{4.21}$$

Étape 1 : On calcul de la fonction $F_{21}^0(R)$. Soit

$$\begin{aligned}
A_1 &= -\frac{1}{2R^2}\left[-b_{2,0}^{(1)}\frac{\cos^3\theta\sin\theta}{R^2+\cos\varphi}+\left(a_{1,1}^{(1)}-b_{0,2}^{(1)}\right)\frac{\cos\theta\sin^3\theta}{R^2+\cos\varphi}+\left(a_{1,1}^{(1)}+b_{2,0}^{(1)}\right)\cos^2\theta\sin\theta+b_{0,2}^{(1)}\sin^3\varphi\right]\\
&\quad +b_{2,0}^{(1)}\frac{\cos^3\theta\sin\theta}{\left(R^2+\cos\varphi\right)^2}-\left(a_{1,1}^{(1)}-b_{0,2}^{(1)}\right)\frac{\cos\theta\sin^3\theta}{\left(R^2+\cos\varphi\right)^2},\\
A_2 &= -\frac{b_{1,1}^{(1)}}{2R^2}\cos\varphi,\\
B_1 &= -\frac{b_{2,0}^{(1)}+a_{1,1}^{(1)}-b_{0,2}^{(1)}}{4}R\cos^2\theta+\left[\frac{b_{2,0}^{(1)}+a_{1,1}^{(1)}-b_{0,2}^{(1)}}{2}R^3-\frac{a_{1,1}^{(1)}}{2R}\right]\cos\varphi\\
&\quad +\left[-\frac{b_{2,0}^{(1)}+a_{1,1}^{(1)}-b_{0,2}^{(1)}}{4}R^5+\frac{a_{1,1}^{(1)}-b_{0,2}^{(1)}}{2}R\right]\ln\left(R^2+\cos\varphi\right),\\
B_2 &= \frac{b_{1,1}^{(1)}}{2R}\sin\varphi+\frac{a_{1,1}^{(1)}}{2R}+\frac{b_{2,0}^{(1)}+a_{1,1}^{(1)}-b_{0,2}^{(1)}}{4}R-\frac{b_{2,0}^{(1)}+a_{1,1}^{(1)}-b_{0,2}^{(1)}}{2}R^3+\\
&\quad \left[\frac{b_{2,0}^{(1)}+a_{1,1}^{(1)}-b_{0,2}^{(1)}}{2}R^5-\frac{a_{1,1}^{(1)}-b_{0,2}^{(1)}}{2}R\right]\ln\left(R^2+1\right).
\end{aligned}$$

Alors

$$\frac{\partial F_1(R,\varphi)}{\partial R}=A_1+A_2,\quad y_1(R,\varphi)=B_1+B_2,$$

et

$$F_{21}^0(R)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(A_1B_1+A_1B_2+A_2B_1+A_2B_2)d\varphi. \tag{4.22}$$

Par le calcul simple, nous trouvons

$$\int_0^{2\pi}A_2B_2d\varphi=0, \tag{4.23}$$

on remarque que la fonction A_1B_1 est impaire par rapport à φ par conséquent

$$\int_0^{2\pi}A_1B_1d\varphi=0. \tag{4.24}$$

De plus, il n'est pas difficile de vérifier que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} A_1 B_2 d\varphi &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{-\frac{b_{1,1}^{(1)}}{4R^3}\left[-b_{2,0}^{(1)}\frac{\cos^3\varphi\sin^2\varphi}{R^2+\cos\varphi}+\left(a_{1,1}^{(1)}-b_{0,2}^{(1)}\right)\frac{\cos\varphi\sin^4\varphi}{R^2+\cos\varphi}+\right.\right.\\ &\left(a_{1,1}^{(1)}+b_{2,0}^{(1)}\right)\cos^2\varphi\sin^2\varphi+b_{0,2}^{(1)}\sin^4\varphi\Big]+\frac{b_{2,0}^{(1)}b_{1,1}^{(1)}}{2R}\frac{\cos^3\varphi\sin^2\varphi}{\left(R^2+\cos\varphi\right)^2}\\ &\left.\left.-\frac{b_{1,1}^{(1)}\left(a_{1,1}^{(1)}-b_{0,2}^{(1)}\right)}{2R}\frac{\cos\varphi\sin^4\varphi}{\left(R^2+\cos\varphi\right)^2}\right\}d\varphi, \qquad (4.25)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} A_2 B_1 d\varphi &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\left[\frac{-b_{1,1}^{(1)}\left(b_{2,0}^{(1)}+a_{1,1}^{(1)}-b_{0,2}^{(1)}\right)}{4}R+\frac{b_{1,1}^{(1)}a_{1,1}^{(1)}}{4R^3}\right]\cos^2\varphi\right. \qquad (4.26)\\ &\left.+\left[\frac{b_{1,1}^{(1)}\left(b_{2,0}^{(1)}+a_{1,1}^{(1)}-b_{0,2}^{(1)}\right)}{4}R^3-\frac{b_{1,1}^{(1)}\left(a_{1,1}^{(1)}-b_{0,2}^{(1)}\right)}{4R}\right]\cos\varphi\ln\left(R^2+\cos\varphi\right)\right\}d\varphi.\end{aligned}$$

L'application des lemmes 4.3.4 et 4.3.5 à (4.25) et (4.26) donne

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} A_1 B_2 d\varphi &= -\frac{b_{1,1}^{(1)}}{8R^3}\left\{18\left(\left(b_{2,0}^{(1)}+a_{1,1}^{(1)}-b_{0,2}^{(1)}\right)R^8+\left(-5b_{2,0}^{(1)}-15a_{1,1}^{(1)}+15b_{0,2}^{(1)}\right)R^4+a_{1,1}^{(1)}\right.\right.\\ &+\left(-18\,b_{2,0}^{(1)}-18\,a_{1,1}^{(1)}+18\,b_{0,2}^{(1)}\right)R^{10}+\left(14\,b_{2,0}^{(1)}-24\,b_{0,2}^{(1)}+24\,a_{1,1}^{(1)}\right)R^6\\ &\left.\left.-6\left(a_{1,1}^{(1)}-b_{0,2}^{(1)}\right)R^2\right)/\sqrt{R^4-1}\right\}, \qquad (4.27)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} A_2 B_1 d\varphi &= -\frac{b_{11}^{(1)}}{8R^3}\left\{\left[2\left(b_{2,0}^{(1)}+a_{1,1}^{(1)}-b_{0,2}^{(1)}\right)R^6-2\left(a_{1,1}^{(1)}-b_{0,2}^{(1)}\right)R^2\right]\sqrt{R^4-1}\right.\\ &-2\left(b_{2,0}^{(1)}+a_{1,1}^{(1)}-b_{0,2}^{(1)}\right)R^8 \qquad (4.28)\\ &\left.+\left(b_{2,0}^{(1)}+3a_{1,1}^{(1)}-3b_{0,2}^{(1)}\right)R^4-a_{1,1}^{(1)}\right\}.\end{aligned}$$

La substitution de (4.23), (4.24), (4.27) et (4.28) dans (4.22), on obtient

$$\begin{aligned}F_{21}^0(R) &= -\frac{b_{11}^{(1)}}{2R^3}\left\{4\left(b_{2,0}^{(1)}+a_{1,1}^{(1)}-b_{0,2}^{(1)}\right)R^8-\left(b_{2,0}^{(1)}+3a_{1,1}^{(1)}-3b_{0,2}^{(1)}\right)R^4\right. \qquad (4.29)\\ &+\left(-4\left(b_{2,0}^{(1)}+a_{1,1}^{(1)}-b_{0,2}^{(1)}\right)R^{10}+\left(3b_{2,0}^{(1)}+5a_{1,1}^{(1)}-5b_{0,2}^{(1)}\right)R^6\right.\\ &\left.\left.-\left(a_{1,1}^{(1)}-b_{0,2}^{(1)}\right)R^2\right)/\sqrt{R^4-1}\right\}.\end{aligned}$$

Étape 2 : Calcul de la fonction $F_{22}^0(R)$.
Comme ci-dessus, nous avons

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{Qp_2-Pq_2}{2R(x^2+y^2)^{3/2}}\right]\Big|_{x=\rho(R,\varphi)\cos\varphi,y=\rho(R,\varphi)\sin\varphi}d\varphi \qquad (4.30)\\
=\;&\frac{1}{4\pi R}\left[\left(a_{2,0}^{(2)}-b_{1,1}^{(2)}\right)\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2\varphi\sin^2\varphi}{R^2+\cos\varphi}d\varphi+a_{0,2}^{(2)}\int_0^{2\pi}\frac{\sin^4\varphi}{R^2+\cos\varphi}d\varphi\right]\\
=\;&\frac{1}{4\pi R}\left\{\left(2a_{2,0}^{(2)}-2b_{1,1}^{(2)}-b_{0,2}^{(2)}\right)R^6+\left(-a_{2,0}^{(2)}+b_{1,1}^{(2)}+3a_{0,2}^{(2)}\right)R^2\right.\\
&+\left[\left(-2a_{2,0}^{(2)}+2b_{1,1}^{(2)}+2a_{0,2}^{(2)}\right)R^8+\left(2a_{2,0}^{(2)}-2b_{1,1}^{(2)}-4b_{0,2}^{(2)}\right)R^4\right.\\
&\left.\left.+2a_{2,0}^{(2)}\right]\frac{1}{\sqrt[2]{R^4-1}}\right\}.
\end{aligned}$$

En utilisant les Lemmes 4.3.4 et 4.3.5, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}-\left[\frac{(Qp_1-Pq_1)(xp_1-yq_1)}{2R(x^2+y^2)^{5/2}}\right]\Big|_{x=\rho(R,\varphi)\cos\varphi,y=\rho(R,\varphi)\sin\varphi} \qquad (4.31)\\
=\;&-\frac{1}{4\pi R}\left[b_{1,1}^{(1)}\left(b_{2,0}^{(1)}-b_{0,2}^{(1)}+a_{1,1}^{(1)}\right)\int_0^{2\pi}\frac{\cos^4\varphi}{R^2+\cos\varphi}d\varphi\right.\\
&\left.+b_{1,1}^{(1)}\left(b_{0,2}^{(1)}-a_{1,1}^{(1)}\right)\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2\varphi}{R^2+\cos\varphi}d\varphi\right],\\
=\;&-\frac{1}{4\pi R}\left\{-2b_{1,1}^{(1)}\left(b_{2,0}^{(1)}+a_{1,1}^{(1)}-b_{0,2}^{(1)}\right)R^6+b_{1,1}^{(1)}\left(-b_{2,0}^{(1)}+a_{1,1}^{(1)}-b_{0,2}^{(1)}\right)R^2+\right.\\
&\left.+\left[2b_{1,1}^{(1)}\left(b_{2,0}^{(1)}+a_{1,1}^{(1)}-b_{0,2}^{(1)}\right)R^8-2b_{1,1}^{(1)}\left(a_{1,1}^{(1)}-b_{0,2}^{(1)}\right)R^4\right]\frac{1}{\sqrt[2]{R^4-1}}\right\}.
\end{aligned}$$

Il résulte de (4.30) et (4.31)

$$F_{2,2}^0(R)=\frac{1}{4R}\left(l_1R^6+l_2R^2+\frac{l_3}{\sqrt[2]{R^4-1}}\right), \qquad (4.32)$$

où

$$\begin{aligned}
l_1 &= 2a_{2,0}^{(2)}-2b_{1,1}^{(2)}-2a_{0,2}^{(2)}+2b_{1,1}^{(1)}\left(b_{2,0}^{(1)}+a_{1,1}^{(1)}-b_{0,2}^{(1)}\right),\\
l_2 &= -a_{2,0}^{(2)}+b_{1,1}^{(2)}+3a_{0,2}^{(2)}+b_{1,1}^{(1)}\left(b_{2,0}^{(1)}-a_{1,1}^{(1)}+b_{0,2}^{(1)}\right),\\
l_3 &= \left[-2a_{2,0}^{(2)}+2b_{1,1}^{(2)}+2a_{0,2}^{(2)}-2b_{1,1}^{(1)}\left(b_{2,0}^{(1)}+a_{1,1}^{(1)}-b_{0,2}^{(1)}\right)\right]R^8\\
&\quad+\left[2a_{2,0}^{(2)}-2b_{1,1}^{(2)}-4a_{0,2}^{(2)}+2b_{1,1}^{(1)}\left(a_{1,1}^{(1)}-b_{0,2}^{(1)}\right)\right]R^4+2a_{0,2}^{(2)}.
\end{aligned}$$

Sur la base de (4.29) et (4.32), $F_2^0(R)$ devient

$$F_2^0(R) = -\frac{1}{4R^3}\left(l_4R^8 + l_5R^4 + \frac{l_6}{\sqrt[2]{R^4-1}}\right), \tag{4.33}$$

où

$$\begin{aligned}
l_4 &= -2a_{2,0}^{(2)} + 2b_{1,1}^{(2)} + 2a_{0,2}^{(2)} + 6b_{1,1}^{(1)}\left(b_{2,0}^{(1)} + a_{1,1}^{(1)} - b_{0,2}^{(1)}\right),\\
l_5 &= a_{2,0}^{(2)} - b_{1,1}^{(2)} - 3a_{0,2}^{(2)} + b_{1,1}^{(1)}\left(-3b_{2,0}^{(1)} - 5a_{1,1}^{(1)} + 5b_{0,2}^{(1)}\right),\\
l_6 &= l_{6,1}R^{10} + l_{6,2}R^6 + l_{6,3}R^2,\\
l_{6,1} &= 2a_{2,0}^{(2)} - 2b_{1,1}^{(2)} - 2a_{0,2}^{(2)} - 6b_{1,1}^{(1)}\left(b_{2,0}^{(1)} + a_{1,1}^{(1)} - b_{0,2}^{(1)}\right),\\
l_{6,2} &= -2a_{2,0}^{(2)} + 2b_{1,1}^{(2)} + 4a_{0,2}^{(2)} + 2b_{1,1}^{(1)}\left(3b_{2,0}^{(1)} + 4a_{1,1}^{(1)} - 4b_{0,2}^{(1)}\right),\\
l_{6,3} &= 2b_{1,1}^{(2)}\left(b_{0,2}^{(1)} - a_{1,1}^{(1)}\right) - 2a_{0,2}^{(2)}.
\end{aligned}$$

Après avoir fait les mêmes transformations que précédemment, (4.33) devient

$$\begin{aligned}
F_2^0(\omega) &= -\frac{1}{8\omega(1+\omega^2)^{1/2}(1-\omega^2)^{5/2}}\left[2l_4\omega(1+\omega^2)^3 + 2l_5\omega(1+\omega^2)(1-\omega^2)^2\right.\\
&\quad \left.+l_{6,1}(1+\omega^2)^4 + l_{6,2}(1+\omega^2)^2(1-\omega^2)^2 + l_{6,3}(1-\omega^2)^4\right] \qquad (4.34)\\
&= \frac{(1-\omega)^{3/2}}{4(1+\omega^2)^{1/2}(1+\omega)^{5/2}}\left[(-b_{1,1}^{(2)} - b_{1,1}^{(1)}a_{1,1}^{(1)} - 3\,b_{1,1}^{(1)}b_{2,0}^{(1)} + \right.\\
&\quad b_{1,1}^{(1)}b_{0,2}^{(1)} + a_{0,2}^{(2)} + a_{2,0}^{(2)})\omega^2 + 4(b_{1,1}^{(1)}a_{1,1}^{(1)} - b_{1,1}^{(1)}b_{0,2}^{(1)} + a_{0,2}^{(2)})\omega\\
&\quad \left.-b_{1,1}^{(2)} - b_{1,1}^{(1)}a_{1,1}^{(1)} - 3\,b_{1,1}^{(1)}b_{2,0}^{(1)} + b_{1,1}^{(1)}b_{0,2}^{(1)} + a_{0,2}^{(2)} + a_{2,0}^{(2)}\right].
\end{aligned}$$

Ceci montre que la fonction moyenne de second ordre $F_2^0(R)$ associée au système (4.4) a au plus une solution dans l'intervalle $(1, +\infty)$. Ensuite, nous fournirons un exemple pour démontrer que cette borne supérieure peut être atteinte.
On considère le système différentiel suivant

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= -y + xy + \varepsilon\left[x^2 + \left(b_{0,2}^{(1)} + \frac{25}{12}\right)xy\right] + \varepsilon^2\left[\left(b_{1,1}^{(2)} + \frac{13}{12}\right)x^2 + a_{1,1}^{(2)}xy\right],\\
\dot{y} &= x + y^2 + \varepsilon\left[\frac{1}{2}x^2 + xy + b_{0,2}^{(1)}y^2\right] + \varepsilon^2\left[b_{2,0}^{(2)}x^2 + b_{1,1}^{(2)}xy + b_{0,2}^{(2)}y^2\right], \qquad (4.35)
\end{aligned}$$

où $b_{0,2}^{(1)}$,$a_{1,1}^{(2)}$ et $b_{i,j}^{(2)}(i,j = 0,1,2)$ sont réels. En utilisant les coordonnées polaires $x = \rho(R,\varphi)\cos\varphi$ et $y = \rho(R,\varphi)\sin\varphi$, le système (4.35) devient

$$\frac{dR}{d\varphi} = \varepsilon M_1(R,\varphi) + \varepsilon^2 M_2(R,\varphi) + O(\varepsilon^3), \tag{4.36}$$

où

$$\begin{aligned} M_1(R,\varphi) &= \frac{1}{2R}\left[-\frac{\cos^3\varphi\sin\varphi}{2\,(R^2+\cos\varphi)}+\frac{25\cos\varphi\sin^3\varphi}{12\,(R^2+\cos\varphi)}+\cos^3\varphi\right. \\ &\quad \left.+\left(b_{0,2}^{(1)}+\frac{31}{12}\right)\cos^2\varphi\sin\varphi+\cos\varphi\sin^2\varphi+b_{0,2}^{(2)}\sin^3\varphi\right], \\ M_2(R,\varphi) &= \left[\frac{Qp_2-Pq_2}{2R(x^2+y^2)^{3/2}}-\frac{(Qp_1-Pq_1)(xp_1-yq_1)}{2R(x^2+y^2)^{5/2}}\right]\Bigg|_{x=\rho(R,\varphi)\cos\varphi,\,y=\rho(R,\varphi)\sin\varphi}, \end{aligned}$$

la fonction moyenne du premier ordre $M_1^0(R)$ est identique à zéro tandis que la fonction moyenne du second ordre $M_2^0(R)$ prend la forme

$$\begin{aligned} M_2^0(R) &= -\frac{5\left(-16\,R^8+16\,R^6\sqrt{R^4-1}+21\,R^4-13\,\sqrt{R^4-1}R^2-5\right)}{24\sqrt{R^4-1}R} \\ &= \frac{(1-\omega)^{3/2}}{4\omega(1+\omega^2)^{1/2}(1+\omega)^{5/2}}\left(-\frac{5}{2}\omega^2+\frac{25}{3}\omega-\frac{5}{2}\right), \end{aligned}$$

où R et ω sont définis comme précédemment. Apparemment, $M_2^0(R)$ a exactement une solution positive, noté par

$$R_1^{(2)}=\frac{\sqrt{5}}{2}. \tag{4.37}$$

Si $\omega_1^{(2)}=1/3$, alors $R\in(1,+\infty)$. De plus, nous avons

$$\frac{dM_2^0(R_1^{(2)})}{dR}=\frac{5}{9}>0. \tag{4.38}$$

La preuve est complète.
Sur la base du lemme 2.3.1, du corollaire 2.3.1 et de la proposition 4.3.1, nous avons la proposition suivante. ■

Proposition 4.3.2 *Pour $|\varepsilon|\neq 0$ suffisamment petit, le système (4.2) a au plus un cycle limite pour la bifurcation du second ordre résultant de l'anneau périodique autour du centre du système non perturbé $(4.2)|_{\varepsilon=0}$ et cette borne supérieure est nette.*

Le théorème 4.1.1 découle immédiatement des propositions 4.2.2 et 4.3.2.

Conclusion

Dans ce mémoire, on s'intéresse à l'étude des cycles de systèmes différentiels polynomiaux continus et discontinus, mais nous concentrons ici plus sur l'étude de cycles limites d'un centre quadratique non linéaire perturbé dans $\mathbb{R}^2$.
La comparaison de l'étude de cycles limites des centres quadratiques non linéaires perturbés des systèmes différentiels continus et discontinus a donné des résultats importants sur l'étude de du qualitatif des systèmes différentiels.
L'application de la méthode de moyennisation aux systèmes différentiels polynomiaux continus et discontinus dans $\mathbb{R}^2$ donne des résultats intéressants.
Notre travail futur consistera à l'application de la méthode de moyennisation au système différentiel perturbé

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + xy + \sum_{k=1}^{n} \varepsilon^k \sum_{i+j=n} a_{i,j}^{(k)} x^i y^j, \\ \dot{y} = x + y^2 + \sum_{k=1}^{n} \varepsilon^k \sum_{i+j=n} b_{i,j}^{(k)} x^i y^j, \end{cases}$$

où ε est un paramètre suffisamment petit, $a_{i,j}^{(k)}$,$b_{i,j}^{(k)}$ sont des constantes réelles et $n \geq 3$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] V. Arnold, Y. Ilyashenko, Dynamical systems I : Ordinary differential equations, Encyclopaedia Math. Sci, Vol. **1**, Springer, Berlin, 1986.

[2] A. Atabaigi, N. Nyamoradi, H. Zangeneh, The number of limit cycles of a quintic polynomial system with a center, Nonlinear Anal., **71** (2009), 3008 − 3017.

[3] N.N. Bautin, On the number of limit cycles which appear with the variation of the coefficients from an equilibrium position of focus or center type, Math. USSR Sb. **100** (1954), 397 − 413.

[4] R. Benterki, J. Llibre, Limit cycles of polynomial differential equations with quintic homogeneous nonlinearities, J. Math. Anal. Appl., **407** (2013), 16 − 22.

[5] M. di Bernardo, C.J. Budd, A.R. Champneys, P. Kowalczyk, Piecewise-Smooth Dynamical Systems : Theory and Applications, Appl. Math. Sci., vol. **163**, Springer-Verlag, London, 2008.

[6] F. Browder, Fixed point theory and nonlinear problems, Bull. Amer. Math. Soc. **9** (1983), 1 − 39.

[7] A. Buică, J. Llibre, Averaging methods for finding periodic orbits via Brouwer degree, Bull. Sci. Math. **128** (2004), 7 − 22.

[8] A. Buică, J. Llibre, Limit cycles of a perturbed cubic polynominal differential center, Chaos Solitons Fractals, **32** (2007), 1059 − 1069.

[9] T. Blows, L. Perko, Bifurcation of limit cycles from centers and separatrix cycles of planar analytic systems, SIAM Rev., **36** (1994), 341 − 376.

[10] J. Chavarriga, M. Sabatini, A survey of isochronous centers, Qual. Theory Dyn. Syst. **1** (1999), 1 − 70.

[11] X. Chen, Z. Du, limit cycles bifurcate from centers of discontinuous quadratic systems, Comput. Math. Appl. **59** (2010), 3836 − 3848.

[12] L.S. Chen, M. S. Wang, The relative position, and the number, of limit cycles of a quadratic differential system, Acta. Math. Sinica 22 (1979), 751–758.

[13] X. Chen, W. Zhang, Isochronicity of centers in a switching Bautin system, J. Differential Equations **252** (2012), 2877 − 2899.

[14] C. Chicone, M. Jacobs, Bifurcation of limit cycles from quadratic isochrones, J. Differential Equations **91** (1991), 268 − 326.

[15] C. Christopher, C. Li, limit Cycles in Differential Equations, Birkhäuser, Boston, 2007.

[16] B. Coll, A. Gasull, R. Prohens, Center-focus and isochronous center problems for discontinuous differential equations Discrete Contin. Dyn. Syst. **6** (2000), 609 − 624.

[17] B. Coll, A. Gasull, R. Prohens, Degenerate Hopf bifurcations in discontinuous planar systems, J. Math. Anal. Appl. **253** (2001), 671 − 690.

[18] B. Coll, A. Gasull, R. Prohens, Bifurcation of limit cycles from two families of centers, Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst., Ser. A (Math. Anal.), **12** (2005), 275 − 287.

[19] B. Coll, J. Llibre, R. Prohens, Limit cycles bifurcating from a perturbed quartic center, Chaos Solitons Fractals, **44** (2011), 317 − 334.

[20] A. Gasull, J. Torregrosa, The center problem for discontinuous Liénard differential equation, Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. **9** (1999), 1751 − 1761.

[21] J. Giné, J. Llibre, Limit cycles of cubic polynomial vector fields via the averaging theory, Nonlinear Anal., **66** (2007), 1707 − 1721.

[22] H. Giacomini, J. Llibre, M. Viano, On the nonexistence, existence and uniqueness of limit cycles, Nonlinearity, **9** (1996), 501 − 516.

[23] H. Giacomini, J. Llibre, M. Viano, On the shape of limit cycles that bifurcate from Hamiltonian centers, Nonlinear Anal., **41** (2000), 523 − 537.

[24] H. Giacomini, J. Llibre, M. Viano, On the shape of limit cycles that bifurcate from non-Hamiltonian centers, Nonlinear Anal., **43** (2001), 837 − 859.

[25] J. Guckenheimer, P. Holmes, Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields (1st Ed.) Springer-Verlag, New York, 1983.

[26] M. Han, P. Yu, Normal Forms, Melnikov Functions, and Bifurcation of Limit Cycles, Springer-Verlag, New York, 2012.

[27] D. Hilbert, Mathematische Probleme (lecture), in : Second Internat. Congress Math., Paris, 1900, in : Nach. Ges. Wiss. Gottingen Math.-Phys. Kl., 1900, pp. 253 − 297.

[28] D. Hilbert, Mathematical problems, (M. Newton, Transl.). Bull. Am. Math, **8** (1902), 437 − 79.

[29] J. Li, Y. Liu, New results on the study of Z_q-equivariant planar polynomial vector fields, Qualitative Theory of Dynamical Systems, $\mathbf{9}(1-2)$ (2010), 167 − 219.

[30] C. Li, C. Liu, J. Yang, A cubic system with thirteen limit cycles, J. Differential Equations, **246** (2009), 3609 − 3619.

[31] J. Llibre, Averaging theory and limit cycles for quadratic systems, Radovi Matematički, **11** (2002), 1 − 14.

[32] C. Li, J. Llibre, Quadratic perturbations of a quadratic reversible Lotka-Volterra system, Qual. Theory Dyn. Syst., **9** (2010), 235 − 249.

[33] [16] C. Li, J. Llibre, Z. Zhang, Weak focus, limit cycles and bifurcations for bounded quadrtic systems, J. Differential Equations, **115** (1995), 193 − 223.

[34] J. Llibre, D.D. Novaes, M.A. Teixeira, Averaging methods for studying the periodic orbits of discontinuous differential systems, http ://arxiv.org/pdf/1205.4211.pdf.

[35] J. Llibre, J. Pérez del Río, J. Rodríguez, Averaging analysis of a perturbed quadratic center, Nonlinear Anal., **46** (2001), 45 − 51.

[36] J. Llibre, E. Ponce, Three nested limit cycles in discontinuous piecewise linear differential systems with two zones, Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. B Appl. Algorithms **19** (2012), 325 − 335.

[37] J. Llibre, G. Świrszcz, On the limit cycles of polynomial vector fields, Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A Math. Anal. **18** (2011), 203 − 214.

[38] N.G. Lloyd, Degree Theory, Cambridge University Press, 1978.

[39] W.S. Loud, Behavior of the period of solutions of certain plane autonomous systems near centers, Contrib. Differ. Equations **3** (1964), 21 − 36.

[40] S. Shi, A concrete example of the existence of four limit cycles for plane quadratic systems, Sci. Sinica **23** (1980), 153 − 158.

[41] S. Smale, Mathematical problems for the next century, Math. Intell, **20** (1988), 7 − 15.

[42] M. Viano, J. Llibre, H. Giacomini, Arbitrary order bifurcations for perturbed Hamiltonian planar systems via the reciprocal of an integrating factor, Nonlinear Anal., **48** (2002), 117 − 136.

[43] G. Xiang, M. Han, Global bifurcation of limit cycles in a family of polynomial systems, J. Math. Anal. Appl., **295** (2004), 633 − 644.

[44] Y. Yanqian, Theory of Limit Cycles, Transl. Math. Monogr., vol. **66**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1986.

[45] P. Yu, M. Han, Four limit cycles from perturbing quadratic integrable systems by quadratic polynomials, Int. J. Bifur. Chaos, **22** (2012), 1250254 (28 pages).

[46] W. Zhang, L.M. Wahl, P. Yu, Conditions for transient viremia in deterministic in-host models : viral blips need no exogenous trigger, SIAM J. Appl. Math, **73**(2) (2013), 853 − 881.

[47] W. Zhang, L.M. Wahl, P. Yu, Viral blips may not need a trigger : How transient viremia can arise in deterministic in-host models, SIAM Rev, **56**(1) (2014), 127 − 155.

Appendice

Dans cet appendice on utilise le logiciel de Maple pour simplifier les expressions mathématiques et calculer les intégrales difficiles.